Quelques rappels de mécanique

1. Modélisation des systèmes de solides

1.1. Liaison réelle

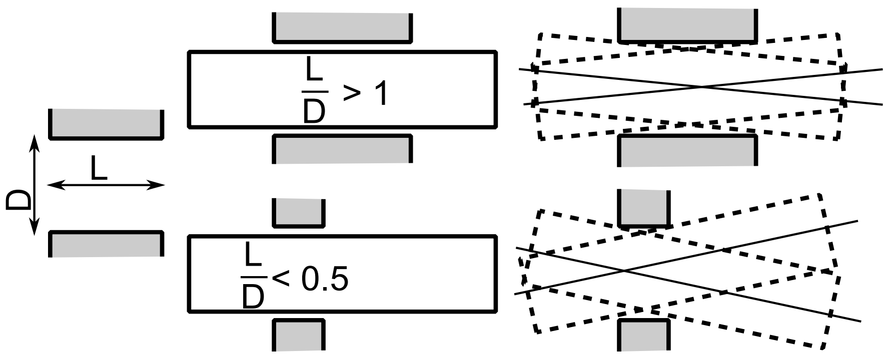
Définition d'une liaison parfaite :

Une liaison **géométriquement sans défaut, sans jeu et sans frottement** est dite **parfaite**.

Remarque : Le modèle mécanique d'une liaison réelle, est une liaison parfaite dont le comportement correspond au mieux à celui de la liaison réelle en fonction de ce que l'on souhaite étudier.

Exemple : Choix d'un modèle de liaison de type du contact cylindre/cylindre.

L'exemple type est le contact cylindre/cylindre. La liaison réelle possède forcément du jeu sinon le mouvement est impossible : présence de « petites translations » et de « petits débattements angulaires ».



On choisit souvent le modèle grâce à un critère, tel que le rapport dimension longitudinale / dimension transversale.

Si **L/D > 1**, la liaison est considérée comme « longue » (débattements angulaires négligés devant la rotation sur l'axe).

Si **L/D < 0.5**, la liaison sera considérée comme « courte » (débattements angulaires non négligés). Le jeu radial est négligé devant la translation longitudinale.

Les valeurs tests dépendent du type de mécanisme, de la qualité de réalisation, des composants et de l'étude. Une fois le critère appliqué et le modèle choisi, la liaison associée au contact réel sera un pivot glissant parfait ou une linéaire annulaire parfaite.

Dans nos études futures → modèles mécaniques avec liaisons parfaites.

1.1.1. Torseurs associés aux modèles de liaison : Rappels

<u>**Définition :**</u> **Le torseur d'inter-efforts** de 1 sur 2 (1→2) s'écrit :

$$\{T(1\rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\frac{\overrightarrow{R_{12}}}{\overrightarrow{M(A,1\rightarrow 2)}}\right\}_A$$

<u>**Définition :**</u> **Le torseur cinématique** de 2 par rapport à 1 (2/1) s'écrit :

$$\{v(2/1)\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & U_{21} \\ q_{21} & V_{21} \\ r_{21} & W_{21} \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad ou \quad \begin{Bmatrix} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & V_{y21} \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{\frac{\overrightarrow{\Omega_{2/1}}}{\overrightarrow{V(A,2/1)}}\right\}_A$$

- <u>*Changement de point :*</u>

Le changement de point s'effectue grâce à la formule suivante (valable pour tout type de torseur) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{Mom}}(\mathrm{B}) = \overrightarrow{\boldsymbol{Mom}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{Res}}$$

- *Torseur couple et torseur glisseur*

<u>**Définition :**</u> Un torseur est un **couple** si $\overrightarrow{Res}$ est nulle et $\overrightarrow{Mom}$(M) non nul.

Un Couple s'écrit de manière identique en tout point de l'espace : $\left\{\frac{\vec{0}}{\overrightarrow{Mom}(M)}\right\}_M$

En effet, $\overrightarrow{Mom}$(N)= $\overrightarrow{Mom}$(M)+ $\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{Res}$= $\overrightarrow{Mom}$(M) : champ de moment uniforme.

<u>**Définition :**</u> Un torseur est un **glisseur** si sa résultante n'est pas nulle et qu'il existe un point M tel que le moment en M est nul : $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{Res} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$

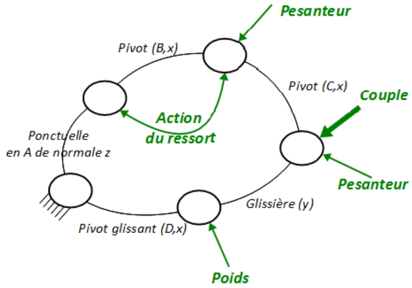
Le moment de ce glisseur est nul en tout point de la droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{Res}$.

1.2. Graphe des liaisons

<u>**Définition :**</u> Un graphe des liaisons modélise un mécanisme :

- structurellement si on fait apparaître chaque liaison entre les solides,
- cinématiquement si on ne fait apparaître que les mouvements relatifs.

<u>Remarque :</u> Ces graphes sont associés au schéma mécanique de structure (d'architecture) et au schéma cinématique.



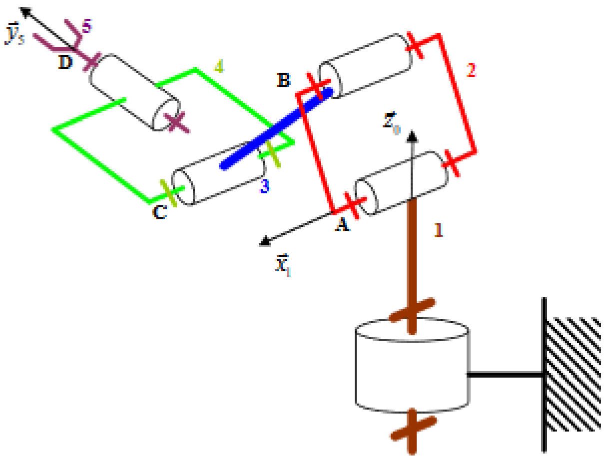
1.3. Chaînes de solides

1.3.1. Chaîne ouverte

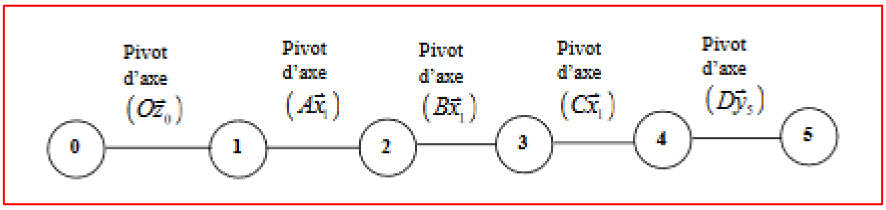
On qualifie un mécanisme de chaîne ouverte lorsque son graphe des liaisons n'est pas bouclé. Cela caractérise les mécanismes de type bras de robot :

<u>Exemple :</u> Bras de robot

- <u>Schéma cinématique :</u>



- Graphe des liaisons :

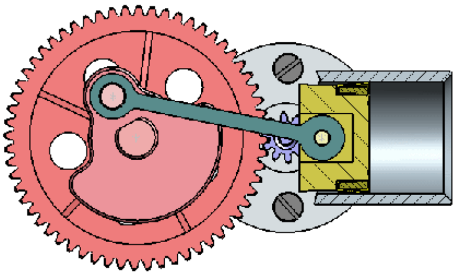


Chaîne ouverte : pas de boucle ou de cycle

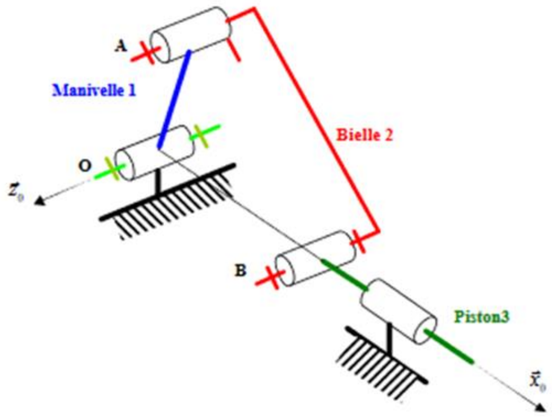
1.3.2. Chaîne fermée

On qualifie un mécanisme de chaîne fermée lorsque son graphe des liaisons est bouclé ou présente un cycle. Cela caractérise les mécanismes de type transformation de mouvement.

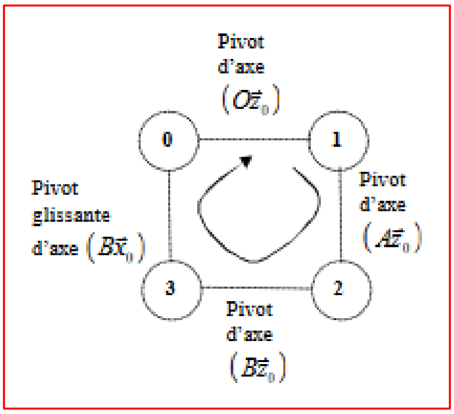
Exemple : Système Bielle – Manivelle – Piston



- Schéma cinématique :



- Graphe des liaisons :



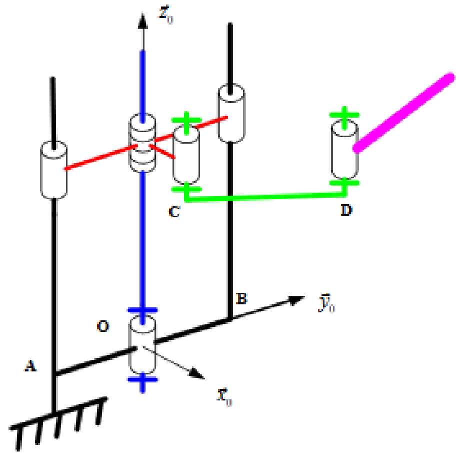
Chaîne fermée : boucle ou cycle

1.3.3. Chaîne complexe – Nombre cyclomatique

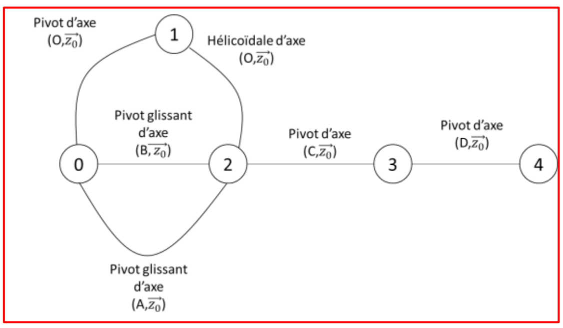
<u>Définition :</u> Un mécanisme à chaîne complexe est un mécanisme pour lequel le graphe des liaisons présente des cycles imbriqués (partie de chaînes fermées) avec ou sans des parties de chaînes ouvertes.

<u>Exemple :</u> Robot de manutention

- <u>Schéma cinématique :</u>



- <u>Graphe des liaisons :</u>



1 chaîne ouvert (bras du robot) : 2-3-4

3 cycles : mais seulement 2 indépendants :

- 0-2-1 par la pivot glissant d'axe (A,$\overrightarrow{z_0}$)
- 0-2-1 par la pivot glissant d'axe (B,$\overrightarrow{z_0}$)
- 0-2-0 liaison parallèle = 1 cycle

Définition du nombre cyclomatique :

Le nombre cyclomatique γ est le nombre de boucles indépendantes du graphe des liaisons d'un mécanisme.

Sur l'exemple du robot de manutention ci-dessus, on a 3 boucles mais uniquement 2 sont indépendantes. On a donc $\gamma = 2$.

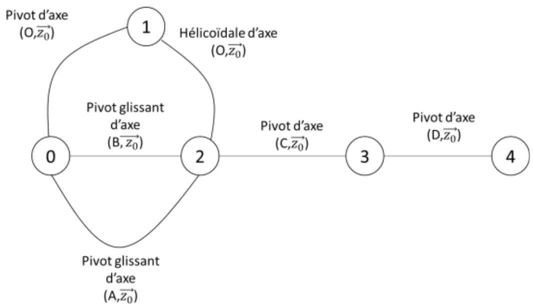
Notations :

- l : nombre de liaisons du graphe des liaisons
- p : nombre de solides du graphe des liaisons

La relation entre ces deux quantités est le nombre cyclomatique :

$$\boldsymbol{\gamma = l - p + 1}$$

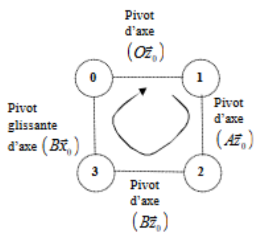
Exemple :



Le robot de manutention possède 5 solides et 6 liaisons. On a donc l = 6 et p = 5.
Ce qui donne : $\gamma = 6 - 5 + 1 = 2$ cycles indépendants.

2. Remarque générale

La méthode cinématique est intéressante pour une chaîne simple fermée : elle limite le nombre d'équations à 6 (contre 6 $\times$ (p-1) équations par la statique).



Remarque : Le frottement ne modifie pas le torseur cinématique.

On peut préférer la méthode statique dans le cas des graphes complexes car il n'est pas nécessaire de déterminer le nombre cyclomatique ni de réduire les liaisons parallèles.

3. Hyperstatisme – Etude statique

3.1. Etude statique

Pour un mécanisme à p solides, on a (p-1) solides si l'on ne comptabilise pas le bâti (sur lequel on ne peut pas faire d'isolement donc sur lequel on ne peut pas appliquer le PFS)
On peut donc appliquer le PFS (p-1) fois, c'est à dire obtenir un système a 6.(p-1) équations.
Sur ces 6.(p-1) équations, seules *rs* sont indépendantes.

<u>Définitions :</u>

- *rs* : nombre d'équations issues de la statique INDEPENDANTES
- $N_s = \sum n_{si}$ nombre total d'inconnues statiques
- n_{si} nombre d'inconnues statiques de liaison i.

3.2. Hyperstatisme - Isostatisme

<u>Définitions :</u>

- On appelle degré d'hyperstatisme, noté h, d'un système mécanique la quantité $h = N_s - rs$
- On dit qu'un système est isostatique si h = 0 (autant d'équations indépendantes que d'inconnues : le système a une solution unique)

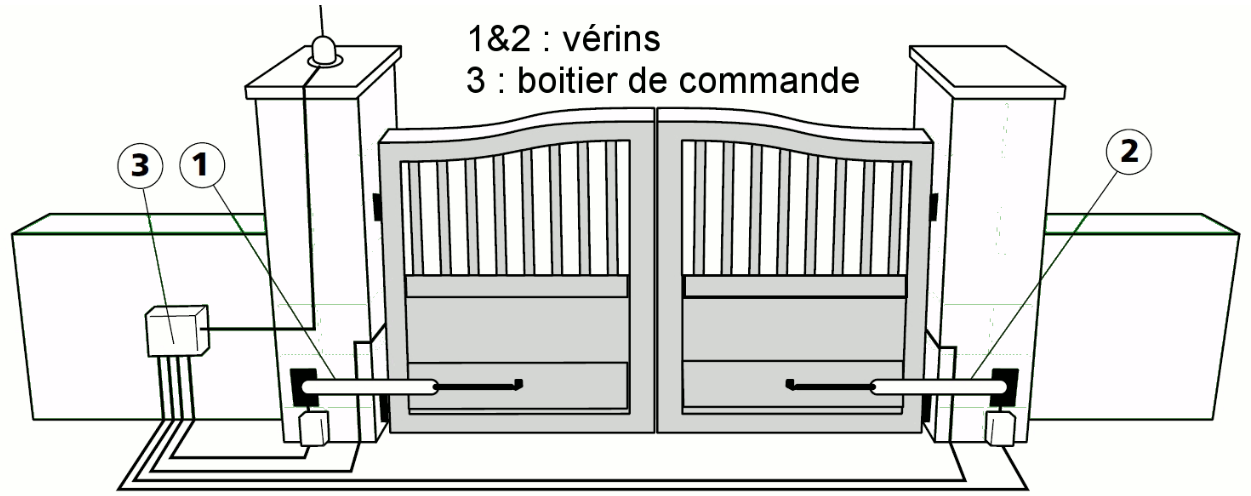
<u>Remarques :</u>

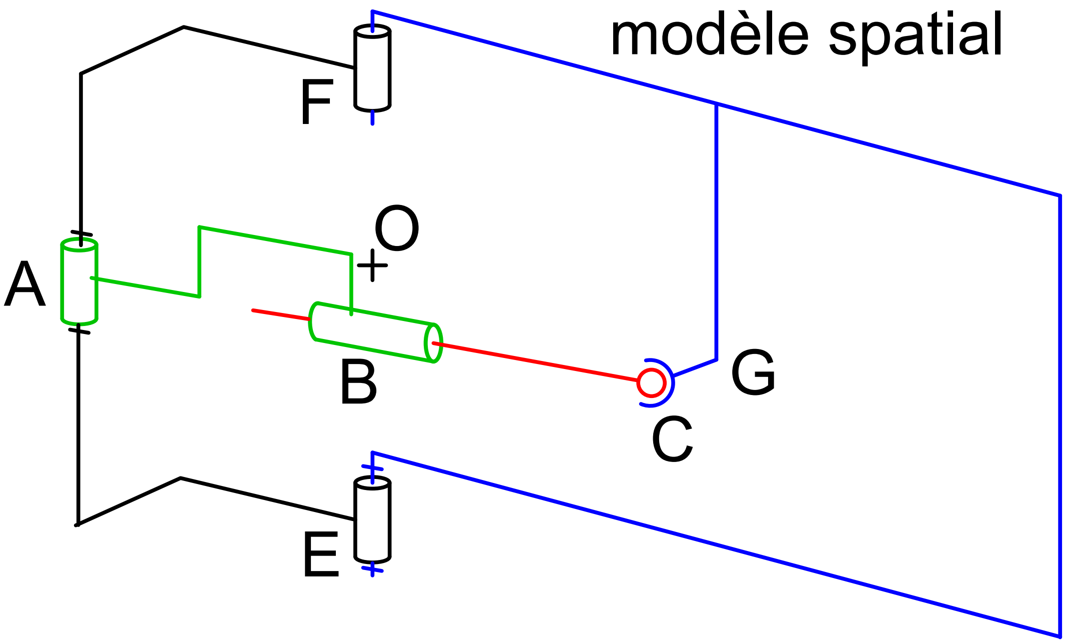
<u>Une chaîne simple ouverte ne peut pas être hyperstatique</u> : le rang du système d'équations statiques est forcément égal au nombre d'inconnues.

<u>Le degré d'hyperstatisme ne dépend pas</u> :

- du frottement : les composantes que cela ajoute dans le torseur statique ne sont pas des inconnues
- des actions extérieures et des poids (ce ne sont pas des inconnues de liaison : leur prise en compte change les valeurs des composantes, mais pas leur indétermination).
- des masses et inerties pour les mêmes raisons que précédemment (ce qui justifie qu'une étude dynamique soit inutile).

4. Détermination du degré d'hyperstatisme : Portail automatique





Questions

Q1 : Tracer le graphe des liaisons associé au schéma cinématique.

Q2 : Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce modèle en posant au choix, les équations statiques issues du PFS aux différents solides ou les équations cinématiques en étudiant les différentes fermetures de chaînes cinématiques