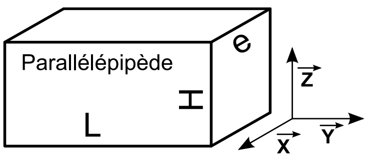
TD – Robot 4 axes

POINT METHODE :

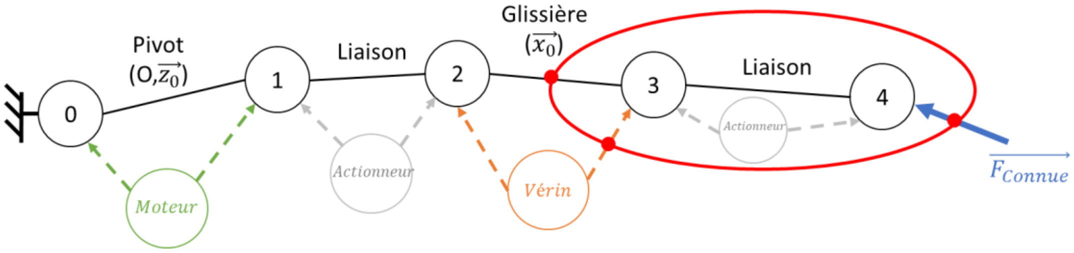
- Forme des matrices d'inertie (**Q1**) :



Deux Plans de symétrie $(Q,\vec{x},\vec{y})$ *et* $(Q,\vec{x},\vec{z})$ *:*

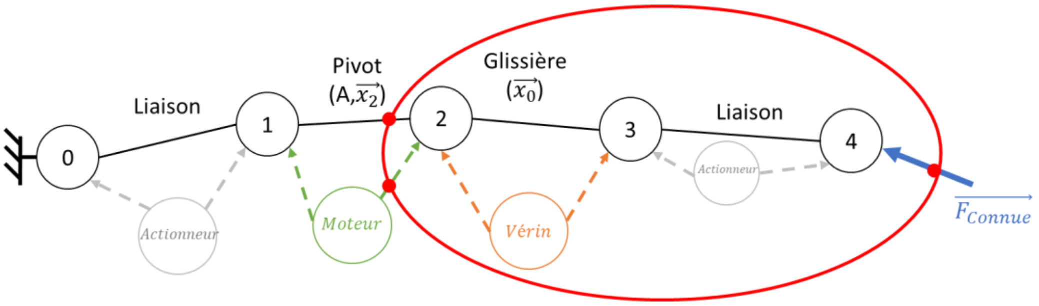
D=0 et E=0 et F=0 $\rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}_{Qxyz}$

- Stratégie de résolution pour un système en chaîne ouverte (**Q2**) :
  - Détermination de l'effort fourni par un vérin :



➢ Isolement de {3+4}
➢ BAME
➢ TRD suivant $\vec{x_0}$

  - Détermination du couple fourni par un moteur :



➢ Isolement de {2+3+4}
➢ BAME
➢ TMD en A suivant $\vec{x_2}$

- Calcul de la projection de $\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)}$ sur un axe $\vec{u}$ (**Q3/Q4**) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}.\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}}{\boldsymbol{dt}}.\vec{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{M_S}\,((\overrightarrow{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}).\vec{\boldsymbol{u}}$$

ou

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}.\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{d}(\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}.\vec{\boldsymbol{u}})}{\boldsymbol{dt}} - \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}.\frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{M_S}\,((\overrightarrow{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}).\vec{\boldsymbol{u}}$$

<u>Si $\vec{u}$ est un vecteur fixe, on obtient :</u>

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}.\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{d}(\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}.\vec{\boldsymbol{u}})}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{M_S}\,((\overrightarrow{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{S}/\boldsymbol{R_g})}).\vec{\boldsymbol{u}}$$

- Calcul du moment dynamique $\overrightarrow{\delta(A,S/R_g)}$ (**Q3/Q4**) :
  - Les matrices sont données en G_i.
  - A n'est pas un point appartenant à 3, 4 ou 2 ET fixe/0.
    - ~~Déplacer les matrices~~
    - Calculer $\overrightarrow{\sigma(G,S/R_g)}$ puis déplacer pour obtenir $\overrightarrow{\sigma(A,S/R_g)}$ mais A ~~point fixe~~
    - Calculer $\overrightarrow{\delta(G,S/R_g)}$ puis déplacer pour obtenir $\overrightarrow{\delta(A,S/R_g)}$

ELEMENTS DE CORRECTION :

Q1 :

$$\left[I_{G_1}(1)\right]_{R_1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{G_1,R_1}$$

$$\left[I_{G_2}(2)\right]_{R_2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{G_2,R_2}$$

$$\left[I_C(3)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{C}$$

$$\left[I_{G_4}(4)\right]_{R_2=R_4} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{G_4,R_2=R_4}$$

Q2 :

$\boldsymbol{F_{34}} \rightarrow \{4\} \rightarrow TRD\ suivant\ \overrightarrow{z_2}$

$\sum \overrightarrow{R_{ext\rightarrow 4}}.\overrightarrow{z_2} = m_4.\overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}.\overrightarrow{z_2}$

D'où $F_{34} = m_4.g.cos\beta + m_4.\frac{d\overrightarrow{V(G_4 \in 4/0)}}{dt}\Big|_{R_0}.\overrightarrow{z_2}$

$\boldsymbol{F_{23}} \rightarrow \{3+4\} \rightarrow TRD\ suivant\ \overrightarrow{x_1}$

$\sum \overrightarrow{R_{ext\rightarrow\{4+3\}}}.\overrightarrow{x_1} = (m_3.\overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} + m_4.\overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}).\overrightarrow{x_1}$

D'où $F_{34} = m_4.\frac{d\overrightarrow{V(G_4 \in 4/0)}}{dt}\Big|_{R_0}.\overrightarrow{x_1} + m_3.\frac{d\overrightarrow{V(C \in 3/0)}}{dt}\Big|_{R_0}.\overrightarrow{x_1}$

~~**TEC**~~

Il n'est pas possible ici d'utiliser le TEC, car cela va faire intervenir les efforts (qui sont inconnus) dans les liaisons lorsque l'on va calculer les puissances extérieures à notre système isolé.

<u>Exemple :</u> Si l'on cherche à déterminer la force du Vérin F_{23} : Ce sera l'effort de la liaison entre 2 et 3 qui nous posera un problème : $P_{ext\ 3\leftrightarrow 2} = \{\tau_{2\rightarrow 3}\} \otimes \{\nu_{3/0}\} \neq 0$ et cela fait intervenir les efforts (inconnus) de la liaison entre 2 et 3.

$\boldsymbol{C_{12}} \rightarrow \{2+3+4\} \rightarrow TMD\ en\ A\ suivant\ \overrightarrow{x_2}$

$\sum \overrightarrow{M(A, ext \rightarrow \{2+3+4\}}.\overrightarrow{x_2} = (\ \overrightarrow{\delta(A \in 2/0)} + \overrightarrow{\delta(A \in 3/0)} + \overrightarrow{\delta(A \in 4/0)}).\overrightarrow{x_2}$

A ∉ 2 ou 3 ou 4 et A n'est pas fixe donc on calcule les $\overrightarrow{\delta(G_\imath \in \imath/0)}$ puis on déplace en A.

$\overrightarrow{\delta(A \in 2/0)} = \overrightarrow{\delta(G_2 \in 2/0)} + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2.\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$

$\overrightarrow{\delta(A \in 3/0)} = \overrightarrow{\delta(C \in 3/0)} + \overrightarrow{AC} \wedge m_3.\overrightarrow{\Gamma(C \in 3/0)}$

$\overrightarrow{\delta(A \in 4/0)} = \overrightarrow{\delta(G_4 \in 4/0)} + \overrightarrow{AG_4} \wedge m_4.\overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}$

D'où $C_{12} = -Z.m_4.g.sin\beta + (\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)}}{dt}\right|_{R_0} + \overrightarrow{AG_4} \wedge m_4.\overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}$

$+\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_3 \in 3/0)}}{dt}\right|_{R_0} + \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3.\overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} + \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}}{dt}\right|_{R_0} + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2.\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}).\overrightarrow{x_1}$

$\boldsymbol{C_{01}} \rightarrow \{1+2+3+4\} \rightarrow TMD\ en\ 0\ suivant\ \overrightarrow{z_0}$

$\sum \overrightarrow{M(O, ext \rightarrow \{1+2+3+4\}}.\overrightarrow{z_0} = (\overrightarrow{\delta(O \in 1/0)} + \overrightarrow{\delta(O \in 2/0)} + \overrightarrow{\delta(O \in 3/0)} + \overrightarrow{\delta(O \in 4/0)}).\overrightarrow{z_0}$

O ∉ 2 ou 3 ou 4, on calcule les $\overrightarrow{\delta(G_\imath \in \imath/0)}$ puis on déplace en O.

D'où $C_{12} = (\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)}}{dt}\right|_{R_0} + \overrightarrow{0G_4} \wedge m_4.\overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)} + \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_3 \in 3/0)}}{dt}\right|_{R_0}$

$+\overrightarrow{0G_3} \wedge m_3.\overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} + \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}}{dt}\right|_{R_0} + \overrightarrow{0G_2} \wedge m_2.\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} + \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0)}}{dt}\right|_{R_0}$

$+\overrightarrow{0G_1} \wedge m_1.\overrightarrow{\Gamma(G_1 \in 1/0)}).\overrightarrow{z_0}$

<u>Q3 :</u>

F_{23}

J'isole $\{3+4\}$

BAME : ……..

$\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \overrightarrow{V(G_3 \in 3/0)} = \left.\frac{d(H.\overrightarrow{z_0} - e.\overrightarrow{y_1} + (L+X).\overrightarrow{x_1})}{dt}\right|_{R_0} = (e.\dot{\alpha} + \dot{X}).\overrightarrow{x_1} + (L+X).\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{V(G_4 \in 4/0)} = (e.\dot{\alpha} + \dot{X} + Z.\dot{\alpha}.sin\beta).\overrightarrow{x_1} + (L+X).\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + \dot{Z}.\overrightarrow{z_2} - Z.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2}$

On dérive les deux vitesses en gardant que les composantes selon $\overrightarrow{x_1}$

$TRD\ suivant\ \overrightarrow{x_1}$

$F_{23} = (m_4 + m_3).\left[e.\ddot{\alpha} + \ddot{X} - (L + X).\dot{\alpha}^2\right] + m_4.\left[2.\dot{Z}.\dot{\alpha}.sin\beta + 2.Z.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.cos\beta + Z.\ddot{\alpha}.sin\beta\right]$

$F_{23} = 132{,}5\ N > 100\ N \rightarrow OK\ CdCF$

C12

J'isole $\{2 + 3 + 4\}$

BAME : ……

$\overrightarrow{\sigma(C \in 3/0)} = [I_C(3)].\vec{0} = \vec{0}$ (masse ponctuelle) donc $\overrightarrow{\delta(C \in 3/0)}$

$\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)} = [I_{G_4}(4)].\overrightarrow{\Omega_{4/0}}$

ATTENTION : Le vecteur rotation doit être exprimé dans la même base que la matrice d'inertie !!

$$\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}.sin\beta \\ \dot{\alpha}.cos\beta \end{pmatrix} = A_4.\dot{\beta}.\overrightarrow{x_2} + B_4.\dot{\alpha}.sin\beta.\overrightarrow{y_2} + C_4.\dot{\alpha}.cos\beta.\overrightarrow{z_2}$$

$\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)}}{dt}.\overrightarrow{x_1} = A_4.\ddot{\beta} + (C_4 - B_4).\dot{\alpha}^2.sin\beta.cos\beta$

Par analogie $\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}}{dt}.\overrightarrow{x_1} = A_2.\ddot{\beta} + (C_2 - B_2).\dot{\alpha}^2.sin\beta.cos\beta$

$TMD\ en\ A\ suivant\ \overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}$

$$\begin{aligned} C_{12} = & -Z.m_4.g.sin\beta + (A_2 + A_4).\ddot{\beta} + (C_2 + C_4 - B_2 - B_4).\dot{\alpha}^2.sin\beta.cos\beta \\ & + m_4\left[2.Z.\dot{Z}.\dot{\beta} + Z^2.\ddot{\beta} - Z^2.\dot{\beta}^2 \right. \\ & \left. - \left(Z.e.\dot{\alpha}^2 + 2.Z.\dot{X}.\dot{\alpha} + Z^2.\dot{\alpha}^2.sin\beta + Z.(L + X).\ddot{\alpha}\right)cos\beta\right] \end{aligned}$$

$C_{12} = 147{,}9\ N.m \rightarrow Force = \frac{C_{12}}{L + X_{max}} = 128N > 100\ N \rightarrow OK\ CdCF$

Q4 :

F34

J'isole $\{4\}$

BAME : ……..

$\overrightarrow{V(G_4 \in 4/0)} = \left(e.\dot{\alpha} + \dot{X} + Z.\dot{\alpha}.sin\beta\right).\overrightarrow{x_1} + (L + X).\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + \dot{Z}.\overrightarrow{z_2} - Z.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2}$

On dérive la vitesse en gardant que les composantes selon $\overrightarrow{z_2}$

$TRD\ suivant\ \overrightarrow{z_2}$

$F_{34} = m_4\left[g.cos\beta - \left((e + Z.sin\beta).\dot{\alpha}^2 + 2.\dot{X}.\dot{\alpha} + (L + X).\ddot{\alpha}\right).sin\beta + \ddot{Z} - Z.\dot{\beta}^2\right]$

C₀₁

J'isole $\{1+2+3+4\}$

BAME : ……

$$C_{01} = \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)}.\overrightarrow{z_0}}{dt} + \overrightarrow{OG_4} \wedge m_4.\overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}$$
$$+\frac{d\overrightarrow{\sigma(C \in 3/0)}.\overrightarrow{z_0}}{dt} + \overrightarrow{OC} \wedge m_2.\overrightarrow{\Gamma(C \in 3/0)}$$
$$+\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}.\overrightarrow{z_0}}{dt} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2.\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$$
$$+\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0)}.\overrightarrow{z_0}}{dt} + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1.\overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 1/0)}$$

- $\overrightarrow{\sigma(C \in 3/0)} = \vec{0}$ (masse ponctuelle)
- $\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}.\overrightarrow{z_0} = \dot{\alpha}.(B_2.sin^2\beta + C_2.cos^2\beta)$

  Donc $\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}.\overrightarrow{z_0}}{dt} = \ddot{\alpha}.(B_2.sin^2\beta + C_2.cos^2\beta) + 2.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.sin\beta.cos\beta(B_2 - C_2)$

- Par analogie $\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)}.\overrightarrow{z_0}}{dt} = \ddot{\alpha}.(B_4.sin^2\beta + C_4.cos^2\beta) + 2.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.sin\beta.cos\beta(B_4 - C_4)$
- $\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0)} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = C_1.\dot{\alpha}$ Donc $\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0)}.\overrightarrow{z_0}}{dt} = C_1.\ddot{\alpha}$

$TMD\ en\ 0\ suivant\ \overrightarrow{z_0}$

$$C_{01} = \ddot{\alpha}.(C_1 + (B_2 + B_4).sin^2\beta + (C_2 + C_4).cos^2\beta) + 2.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.sin\beta.cos\beta.(B_2 + B_4 - C_2 - C_4)$$
$$+ m_2.\ddot{\alpha}.(e^2 + l_2{}^2) + m_3.(e^2.\ddot{\alpha} + e.\ddot{X} - e.(L+X).\dot{\alpha}^2 + (L+X).\left(e.\dot{\alpha}^2 + 2.\dot{X}.\dot{\alpha}\right)$$
$$+ (L+X).\ddot{\alpha} + (\overrightarrow{0G_4} \wedge m_4.\overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}).\overrightarrow{z_0} = \cdots$$

<u>Q5 :</u>

Le couplage provient du fait qu'aucun actionneur n'est indépendant des autres… (tous contiennent des termes associés aux accélérations provoquées par les autres actionneurs).