Energétique

Compétences attendues :

- ✓ Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- ✓ Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
- ✓ Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

1. Energie cinétique

1.1. Définition

$$Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\int_S \left[\overrightarrow{V(M \in S/Rg)}\right]^2 dm\,(M)$$ Unité : le Joule (J)

1.2. Cas du solide indéformable :

$$2E_C(S/R_g) = \int_S [\overrightarrow{V(G \in S/R_g)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{GM}]^2\, dm$$

$$= \int_S [\overrightarrow{V(G \in S/R_g)}]^2\, dm + \int_S [\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{GM}]^2\, dm + 2\int_S \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}.[\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{GM}]\, dm \; *$$

* produit mixte: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ )$ = $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c})$= déterminant des 3 vecteurs donc invariant par permutation circulaire.

Donc $\left[\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right]^2 = \left[\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right].\left[\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right] = \vec{\Omega}.\overrightarrow{GM} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}]$

$$= m[\overrightarrow{V(G \in S/R_g)}]^2 + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \int_S [\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{GM}]\, dm + 2\overrightarrow{V(G \in S/R_g)}.[\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \cancel{\int_S \overrightarrow{GM}]\, dm}$$

D'où $$\boldsymbol{Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\, m \left[\overrightarrow{V(G \in S/Rg)}\right]^2 + \frac{1}{2}\, \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}.[I_G(S)]\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}$$

Attention : Cette formule n'est vrai qu'en G !!

Cas particuliers:

- Mouvement d'un solide S autour d'un point fixe A de R_g :

$$Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}.\,[I_A(S)]\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$$

à partir des équations précédentes, en passant par A au lieu de G

- Mouvement d'un solide S autour d'un axe fixe (A,$\vec{x}$) de R_g :

on peut poser $\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} = \omega\vec{x}$ d'où

$$Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\,[I_{A_x}(S)]\omega^2$$

Remarque : Energie cinétique d'un ensemble ∑ de n solides S_i :

$$Ec(\Sigma/Rg) = \sum_{i=1}^{n} Ec_i\,(S_i/R_g)$$

Expression générale :

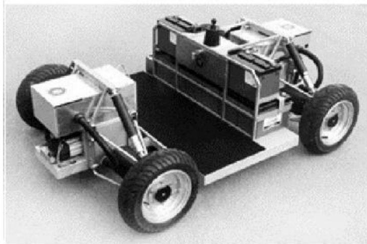
$$\boldsymbol{Ec(S/Rg) = \frac{1}{2}\{C(S/R_g)\}_Q \otimes \{V(S/R_g)\}_Q}$$

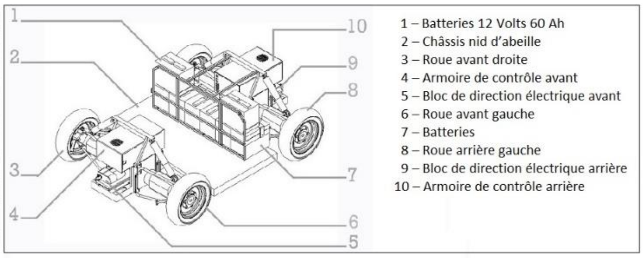
Remarques :

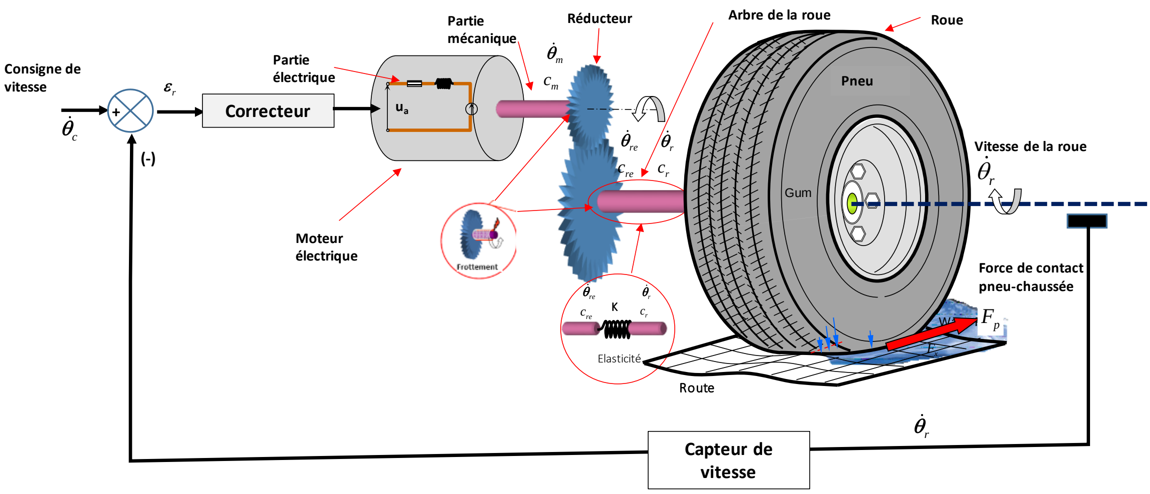
- L'énergie cinétique est toujours une grandeur positive.
- L'énergie cinétique est indépendante du point où on la calcule.
- Les torseurs doivent être écrits au même point avant multiplication. On cherchera toujours à effectuer les calculs là où ils sont les plus simples.
- Lors du calcul, le moment cinétique est multiplié par la vecteur rotation : **Il faut alors calculer uniquement les composantes utiles du moment cinétique et de la matrice d'inertie**. Dans la plupart des cas, il n'est nécessaire de calculer uniquement le moment d'inertie autour de l'axe de rotation (cela ne signifie pas que les autres composantes de la matrice d'inertie sont nulles, mais simplement qu'elles n'apparaissent pas dans l'expression finale).

1.3. Inertie équivalente :

<u>Application :</u> Calcul de l'inertie équivalente d'une chaîne de transmission du véhicule RobuCar.







On ne s'intéressera ici qu'au système {moteur + réducteur +roue}.

<u>On donne les caractéristiques suivantes :</u>

<u>Moteur :</u>

Moment d'inertie de l'arbre moteur : J_{mot} = 0,0095 kg.m².

Masse du moteur : M_{Mot} = 0,350 kg.

<u>Réducteur :</u>

Moment d'inertie de l'arbre du réducteur : J_{Red} = 3,2 kg.m².

Rapport de réduction : N = 13. Masse du réducteur : M_{Red} = 0,125 kg.

<u>Roue :</u>

Moment d'inertie de l'arbre du réducteur : J_{Roue} = 0,004 kg.m².

Rayon : R = 0,20 m. Masse de la roue : M_{roue} = 0,2 kg.

<u>Véhicule :</u>

Vitesse de translation : V

Déterminer l'inertie équivalente du système de transmission ramené au moteur.

$$Ec(Mot) = \frac{1}{2} J_{mot}\omega_{mot}^2 + \frac{1}{2} M_{mot}V^2$$

$$Ec(Red) = \frac{1}{2} J_{Red}\omega_{Red}^2 + \frac{1}{2} M_{Red}V^2$$

$$Ec(Roue) = \frac{1}{2} J_{Roue}\omega_{Roue}^2 \ \frac{1}{2} M_{roue}V^2$$

$$Ec(Tot) = E_c(Mot) + E_c(Red) + E_c(Roue)$$

$$Ec(Tot) = \frac{1}{2} J_{mot}{\omega_{mot}}^2 + \frac{1}{2} J_{Red}{\omega_{Red}}^2 + \frac{1}{2} J_{Roue}\omega_{Roue}^2 + \frac{1}{2}(M_{mot} + M_{Red} + M_{roue}).V^2$$

Or $N = \frac{\omega_{mot}}{\omega_{Red}}$ et $V = \omega_{Roue}.R = \omega_{Red}.R$

D'où

$$Ec(Tot) = \frac{1}{2} J_{mot}{\omega_{mot}}^2 + \frac{1}{2} J_{Red}\frac{{\omega_{mot}}^2}{N^2} + \frac{1}{2} J_{roue}.{\omega_{mot}}^2.\frac{1}{N^2} + \frac{1}{2}(M_{mot} + M_{Red} + M_{roue}).{\omega_{mot}}^2.\frac{R^2}{N^2}$$

Donc

$$Ec(Tot) = \frac{1}{2} {\omega_{mot}}^2\left[J_{mot} + \frac{J_{Red}}{N^2} + \frac{J_{roue}}{N^2} + (M_{mot} + M_{Red} + M_{roue})\frac{R^2}{N^2}\right] = \frac{1}{2} {\omega_{mot}}^2 J_{eq}$$

Et finalement $J_{eq} = J_{mot} + \frac{J_{Red}}{N^2} + \frac{J_{roue}}{N^2} + (M_{mot} + M_{Red} + M_{roue})\frac{R^2}{N^2}$ <u>A.N. :</u> J_{eq} = 0,0286 kg.m²

2. Puissance

2.1. Puissance des efforts extérieurs à un système matériel Σ en mouvement par rapport à un repère R_g

Soit un champ de forces $\overrightarrow{dF(M)}$ agissant en chaque point M d'un système Σ.

Exemples :

- *Pesanteur :* $\overrightarrow{dF}(M)$= ρ $\overrightarrow{g(M)}\, dv$
- *Champ des forces de contact entre 2 solides :* $\overrightarrow{dF(M)}$ *= - p(M)* $\overrightarrow{n(M)}$*ds + f p(M)* $\overrightarrow{t(M)}$ *ds*

La puissance développée, à l'instant t, par l'action des efforts extérieurs sur Σ, dans le mouvement de Σ/R_g est :

$$\boldsymbol{P(Ext \rightarrow \Sigma/R_g) = \int_{M\in\Sigma} \overrightarrow{V(M \in \Sigma/R_g)}.\overrightarrow{dF(M)}}$$

<u>Unité :</u> Le Watt et on a : 1kW = 1,36 ch

<u>Remarque :</u> On définit le travail fournit par [Ext→ Σ] entre les instants t_0 et t_1 par :

$$W_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} P(t)dt$$

<u>Unité :</u> Le Joule et on a : 1 kW.h = 3600.10^3 J

2.2. Cas particulier du solide indéformable :

On a $\overrightarrow{V(M \in S/Rg)} = \overrightarrow{V(A \in S/Rg)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}$

d'où

$$P(Ext \rightarrow S/R_g) = \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)}.\overrightarrow{V(A \in S/Rg)} + \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)}.[\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}]$$
$$= \overrightarrow{V(A \in S/Rg)}\,.\int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}.\int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF(M)}$$

or le torseur associé aux efforts extérieurs à S en A s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{R(Ext \rightarrow S)} \\ \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{M_A(Ext \rightarrow S)} \end{Bmatrix}$$

donc $P(Ext \rightarrow S/R_g) = \overrightarrow{V(A \in S/Rg)}.\overrightarrow{R(Ext \rightarrow S)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}.\overrightarrow{M_A(Ext \rightarrow S)}$

La puissance développée par les actions mécaniques extérieures à un solide S en mouvement par rapport à R est égale au produit (comoment) du torseur cinématique de S/R_g par le torseur des actions mécaniques extérieures.

$$\boldsymbol{P(Ext \rightarrow S/R_g) = \{\tau(Ext \rightarrow S)\}_A \otimes \{V(S/Rg)\}_A}$$

Le comoment ne dépend pas du point choisi pour le calcul des deux torseurs (même point pour les deux !) mais du repère R.

Rappel : Le comoment de deux torseurs s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_A = X.V_x + Y.V_y + Z.V_z + L.\omega_x + M.\omega_y + N.\omega_z$$

2.3. Puissance des efforts intérieurs à un système de solides indéformables :

On parle aussi de la puissance des inter-efforts de liaison.

Soient 2 solides S_1 et S_2 en liaison à l'intérieur d'un système. La puissance développée par les efforts de liaison entre les 2 solides est de la forme :

$$\begin{aligned} P(S_2 \cup S_1 /R_g) &= P(S_2 \rightarrow S_1 /R_g) + P(S_1 \rightarrow S_2 /R_g) \\ &= \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} \otimes \{V(S_1/R_g)\} + \{\tau(S_1 \rightarrow S_2)\} \otimes \{V(S_2/R_g)\} \\ &= \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} \otimes [\{V(S_1/R_g)\} - \{V(S_2/R_g)\}] \end{aligned}$$

D'où $$\boldsymbol{P_i(S_1, S_2) = \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} \otimes \{V(S_1/S_2)\}}$$

Cette puissance est indépendante du repère R_g par rapport auquel elle est calculée.

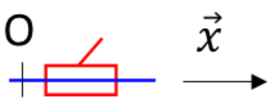
2.4. Liaison parfaite entre deux solides

Deux solides S_1 et S_2 ont une liaison parfaite si, quel que soit le mouvement autorisé par la liaison, la puissance développée par les actions mutuelles entre S_1 et S_2 est nulle (pas de frottement) :

$$\boldsymbol{P_i(S_1, S_2) = 0}$$

Application : Retrouver les torseurs des actions mécaniques pour les liaisons normalisées suivantes :

- Pivot glissant d'axe $\vec{x}$

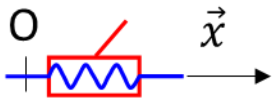


$$\{V(S_1/S_2)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

$$P_i(S_1, S_2) = 0 \rightarrow L.\omega_x + X.V_x = 0 \quad \forall\, \omega_x \; et \; \forall\, V_x \rightarrow X = L = 0$$

D'où $$\{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

- <u>Hélicoïdale d'axe $\vec{x}$</u>



$$\{V(S_1/S_2)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & \frac{p\omega_x}{2\pi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \qquad \{\tau(S_2 \to S_1)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

$$P_i(S_1,S_2) = 0 \to L.\omega_x + X.\frac{p\omega_x}{2\pi} = 0 \quad \forall\, \omega_x \to L = -X\frac{p}{2\pi}$$

D'où $\{\tau(S_2 \to S_1)\} = \begin{Bmatrix} X & -X\frac{p}{2\pi} \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$

<u>Remarque générale :</u> La puissance est une grandeur scalaire, donc <u>**signée**</u>.

<u>Exemples :</u>

- Puissance « motrice » : un moteur entraîne un arbre : $P_{mot} = \overrightarrow{C_{mot\to arbre}}.\overrightarrow{\Omega_{arbre/0}} > 0$. La vitesse de rotation et le couple sont de même sens.

- Puissance dans une liaison glissière 1/0 avec frottement : $P_{0\to 1} = \overrightarrow{T_{0/1}}.\overrightarrow{V_M(1/0)} < 0$. L'effort tangentiel étant opposé à la vitesse de glissement (Coulomb).

- Puissance dissipée dans un embrayage ou un frein : $P_{0\to 1} = \overrightarrow{C_{f\,0/1}}.\overrightarrow{\Omega_{1/0}} < 0$.

3. Théorème de l'énergie cinétique

3.1. Solide unique S en mouvement / R_g :

$$\underline{\text{PFD :}} \quad \{D(S/R_g)\} = \{\tau(\bar{S} \to S)\}$$

en multipliant cette expression par le torseur cinématique, on obtient :

$$\{D(S/R_g)\} \otimes \{V(S/R_g)\} = \{\tau(\bar{S} \to S)\} \otimes \{V(S/R_g)\} = P(\bar{S} \to S/R_g)$$

= Puissance galiléenne des efforts extérieurs à S.

Or $\{D(S/R_g)\} \otimes \{V(S/R_g)\} = [\int_S \overrightarrow{\Gamma(M \in S/R_g)}\, dm].\overrightarrow{V(A \in S/R_g)} + [\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma(M \in S/R_g)}\, dm].\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$

$$= \int_S \overrightarrow{\Gamma(M \in S/R_g)}.[\overrightarrow{V(A \in S/R_g)} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}]dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{\Gamma(M \in S/R_g)}.[\overrightarrow{V(M \in S/R_g)}]dm = \int_S \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(M \in S/R_g)}^2 dm$$

$$= \frac{d}{dt} E_c(S/R_g)$$

d'où le théorème de l'énergie cinétique :

La dérivée, par rapport au temps, de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide S est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S.

$$\boldsymbol{P(Ext \to S/R_g) = \frac{d}{dt} E_c(S/R_g)}$$

3.2. Système Σ de n solides S_j :

Pour un solide, on a :

$$P(Ext \to S_j/R_g) = \frac{d}{dt} E_c(S_j/R_g)$$

en ajoutant les n relations pour les n solides :

$$\sum P(Ext \to S_j/R_g) = \sum \frac{d}{dt} E_c(S_j/R_g)$$

$$\boldsymbol{P(Ext \to \Sigma) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} P_i(S_j, S_k) = \frac{d}{dt} E_c(\Sigma/R_g)}$$

Remarques :

- L'équation obtenue à partir du théorème de l'énergie cinétique n'est pas indépendante des équations fournies par le PFD.

- Le principe fondamental donne 6 équations et le théorème de l'énergie cinétique une seule, donc suffisant seulement pour les problèmes à un degré de mobilité.

- Pour un système de solides, il faut tenir compte des inter-efforts, contrairement au PFD.

- **Le théorème de l'énergie est efficace en la présence de plusieurs actionneurs à l'intérieur du système isolé.** Cependant, rien n'empêche d'associer une méthode énergétique et un PFD.

- Puisque le théorème de l'énergie est une variante du PFD, vous devez prendre les mêmes précautions que lorsque vous appliquez le PFD : en particulier, **vous devez réaliser un bilan très soigneux des actions intérieures et extérieures**. Un graphe des liaisons faisant apparaître toutes les actions, poids et **actionneurs compris**, est obligatoire.

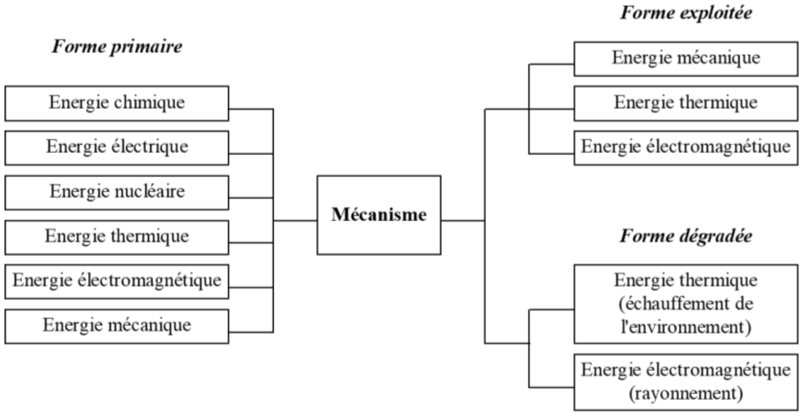
- **LE THEOREME DE L'ENERGIE EST UTILISE POUR DETERMINER L'EQUATION DU MOUVEMENT.**

- L'application du PFD, par isolements successifs en utilisant les équations sur les axes des mouvements, permet d'obtenir la même chose que le théorème de l'énergie.

4. Rendement

4.1. Définitions :

Un mécanisme transforme une énergie sous forme primaire en énergie sous forme exploitée.
Cette transformation entraîne une dissipation de l'énergie sous forme dégradée.



Le rendement mécanique d'un mécanisme est donné par : $\eta(t) = \frac{|P_{réceptrice}|}{P_{motrice}}$ $\qquad$ $\mathbf{0 \leq \eta(t) \leq 1}$

- $P_{motrice}$ = P_m = puissance reçue par le système $\quad P_m \geq 0$

  Un moteur exerce une puissance motrice si le couple a le même signe que ω
  La pesanteur si le centre de gravité descend.

- $P_{dissipée}$ = P_d = puissance perdue sous forme de chaleur $P_d \leq 0$

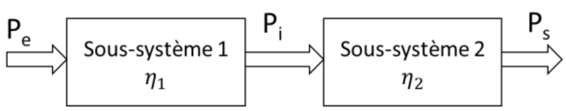
  Forces de frottement dans les liaisons

- $P_{réceptrice}$ = P_r = puissance donnée par le système sous une forme autre que la chaleur $P_r \leq 0$

  Puissance de la pesanteur si le centre de gravité monte
  Puissance d'un moteur si le couple et ω sont de signe contraire ("frein-moteur")

4.2. Calcul du rendement d'un ensemble Σ de solides en mouvement / R_g :

- Le rendement dépend en général du temps. En général, on calcule un rendement moyen pour les mouvements cycliques.
- Si toute la puissance est dissipée sous forme de chaleur, le rendement est nul (frein).
- Si le système est composé de plusieurs sous-systèmes, les rendements se multiplient :



$$\eta_{global} = \frac{P_s}{P_e} = \frac{P_i}{P_e} \cdot \frac{P_s}{P_i} = \eta_1 . \eta_2$$

On peut généraliser le résultat : $\eta_{global} = \frac{P_s}{P_e} = \prod \eta_i$