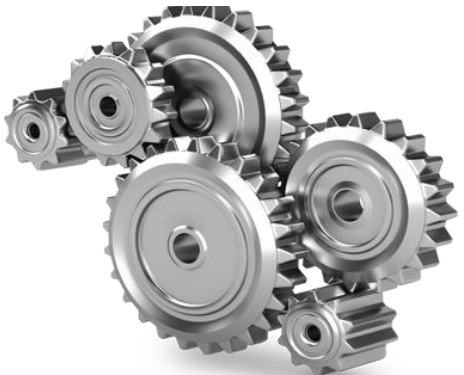
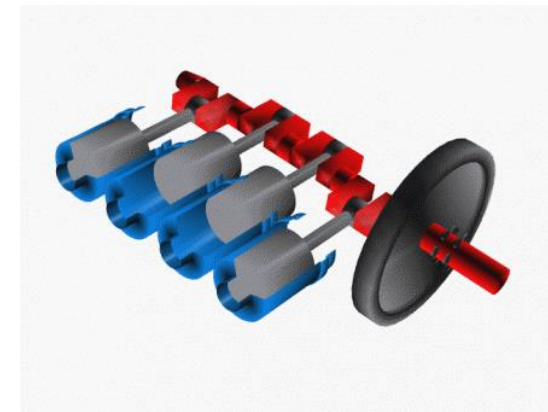
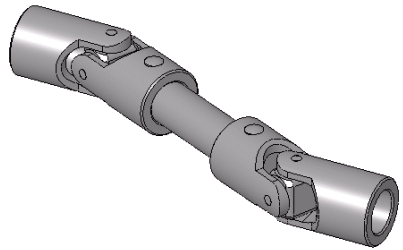
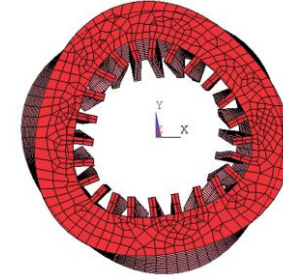
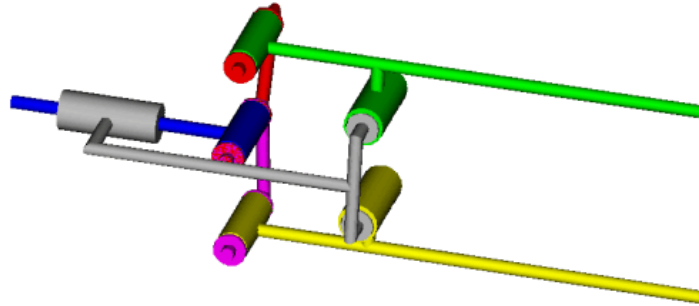
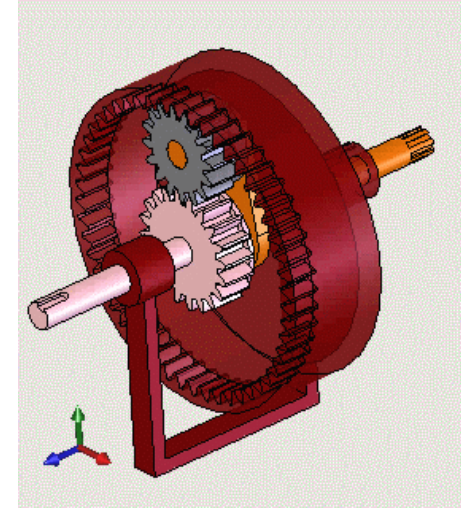
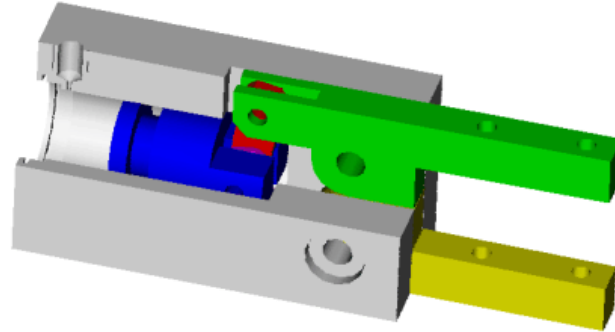
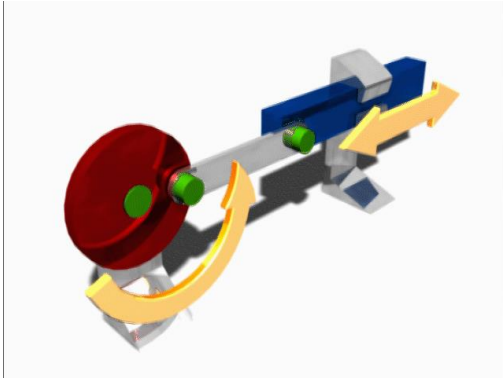
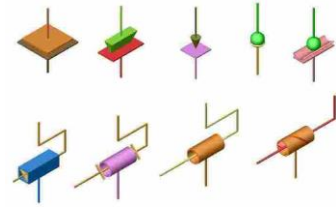
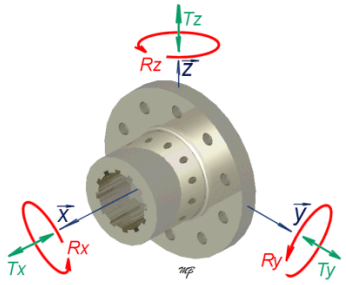


# Théorie des mécanismes



# Théorie des mécanismes

## Compétences attendues :

- ✓ Modifier un modèle pour le rendre isostatique.
- ✓ Mobilité du modèle d'un mécanisme.
- ✓ Hyperstatisme du modèle.
- ✓ Substitution de liaisons.

# Modélisation des systèmes de solides

## Théorie des mécanismes

La théorie des mécanismes → domaine d'étude de la mécanique (cinématique et statique)  
→ étudier les mécanismes et structures → concevoir ou améliorer les systèmes

Outils : graphe des liaisons, schéma cinématique, fermeture cinématique, PFS, ...  
→ caractériser la rigidité d'une structure  
→ savoir si l'ensemble des inconnues des liaisons sont déterminables

**→ Degré de mobilité et l'hyperstatisme d'un modèle**

# Modélisation des systèmes de solides

## Hypothèses

- Pièces → indéformables
- Liaisons → parfaites (sans jeu et sans frottement)

# Modélisation des systèmes de solides

## Liaison réelle

Définition : Une liaison **géométriquement sans défaut, sans jeu et sans frottement** est dite **parfaite**.

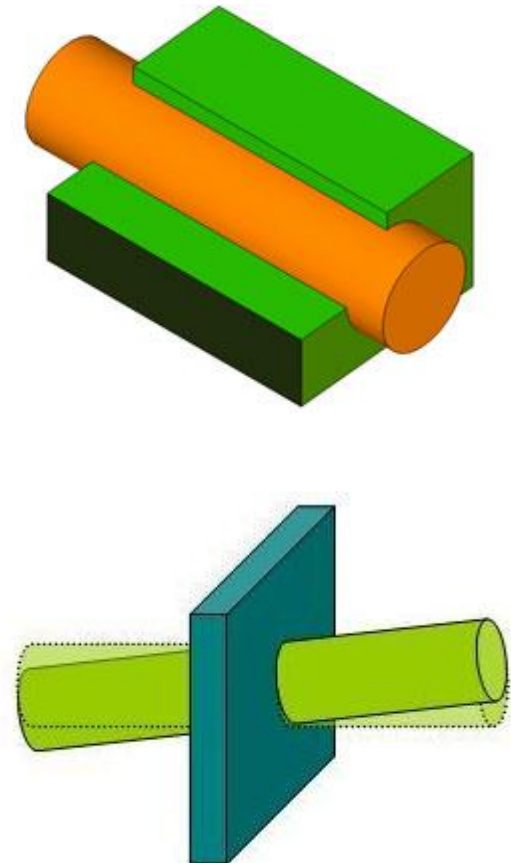
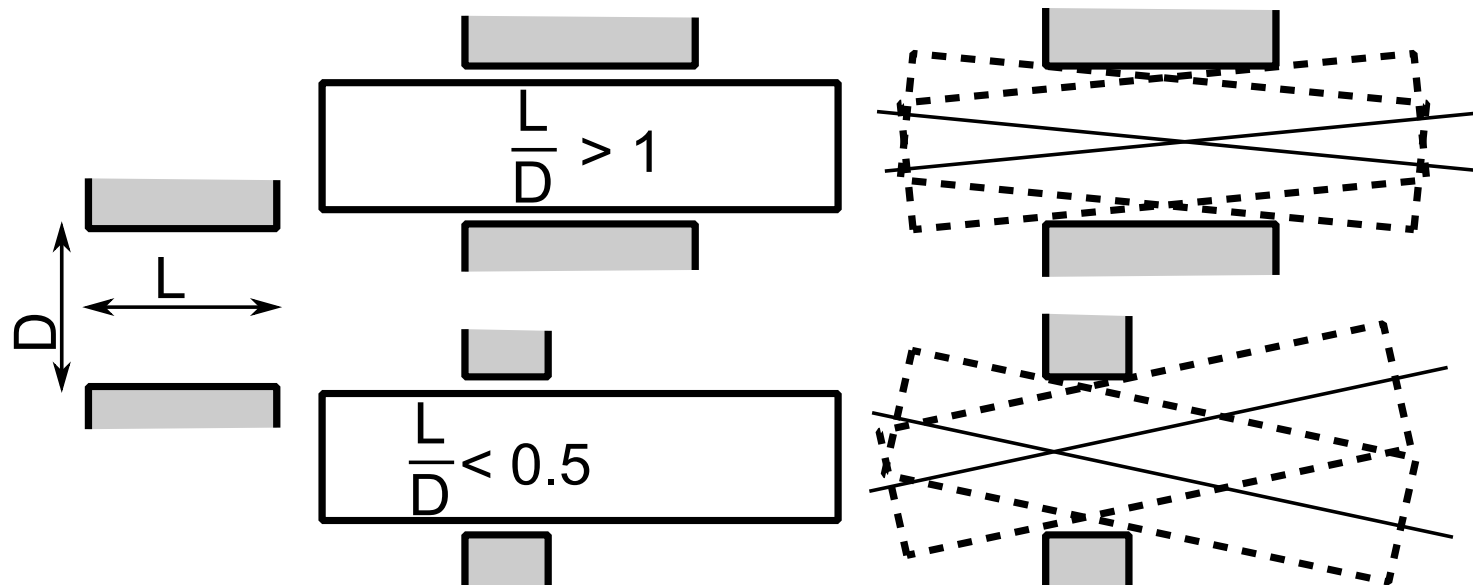
Remarque : Le modèle mécanique d'une liaison réelle, est une liaison parfaite dont le comportement correspond au mieux à celui de la liaison réelle en fonction de ce que l'on souhaite étudier.

# Modélisation des systèmes de solides

## Liaison réelle

### Choix d'un modèle de liaison - Exemple type du contact cylindre/cylindre

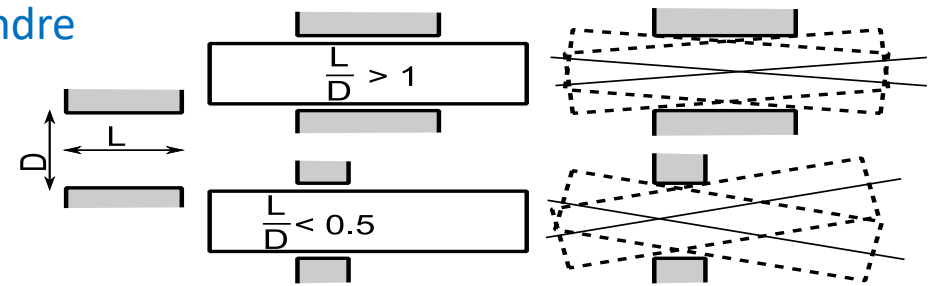
La liaison réelle possède forcément du jeu sinon le mouvement est impossible : présence de « petites translations » et de « petits débattements angulaires ».



# Modélisation des systèmes de solides

## Liaison réelle

Choix d'un modèle de liaison - Exemple type du contact cylindre/cylindre



$L/D > 1 \rightarrow$  Liaison « longue » (débattements angulaires négligés devant la rotation sur l'axe).

$L/D < 0.5 \rightarrow$  Liaison « courte » (débattements angulaires non négligés).

*Le jeu radial est négligé devant la translation longitudinale.*

Liaison associée au contact réel : **Pivot glissant parfait** ou **Linéaire annulaire parfaite.**

Dans nos études futures  $\rightarrow$  modèles mécaniques avec liaisons parfaites.

# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Graphe des liaisons

Définition : Un graphe des liaisons modélise un mécanisme :

- structurellement (liaison entre les solides)
- cinématiquement (mouvements relatifs)



# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Chaînes de solides

### Chaîne ouverte

Définition : Chaîne ouverte → graphe des liaisons ~~bouclé~~

Exemple : Bras de robot

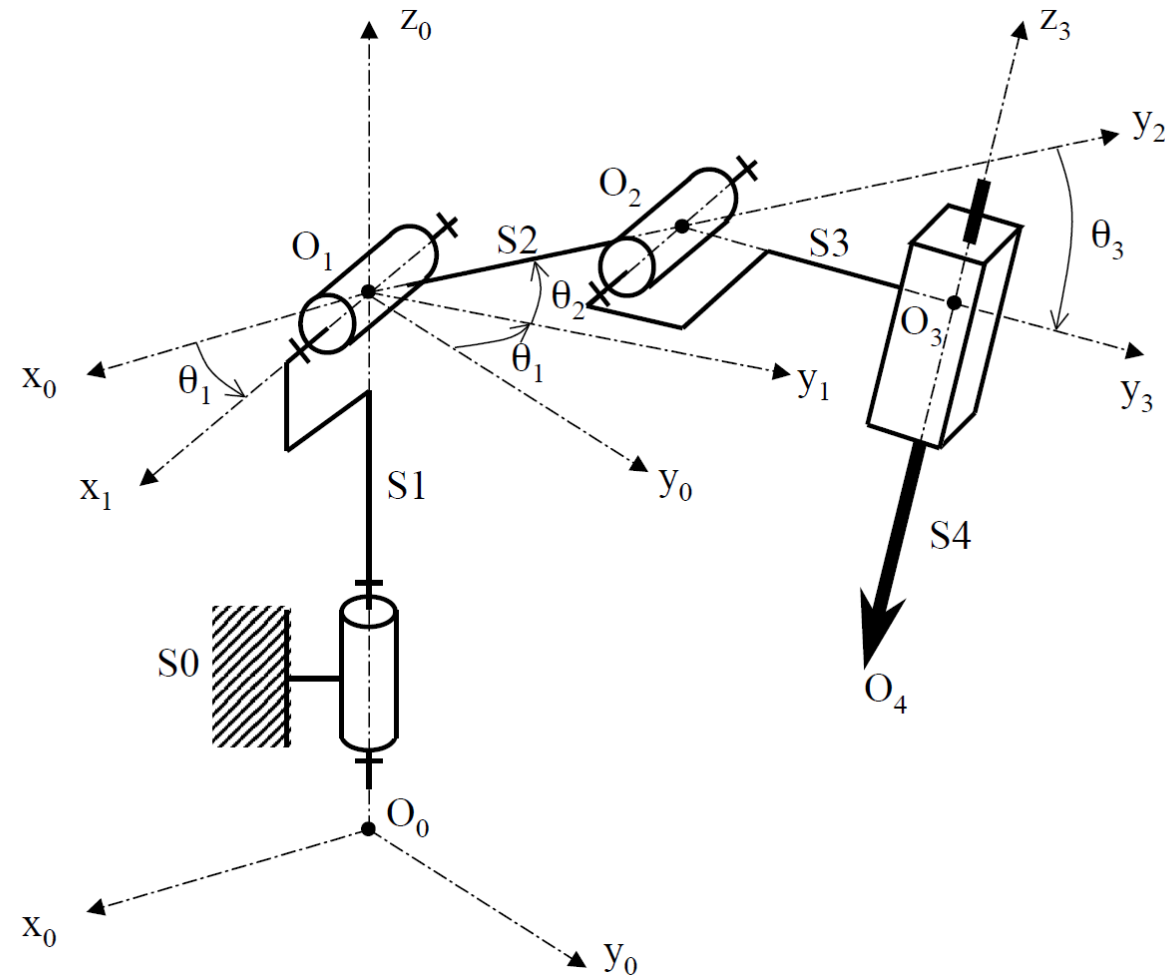


# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Chaînes de solides

Chaîne ouverte

Schéma cinématique :

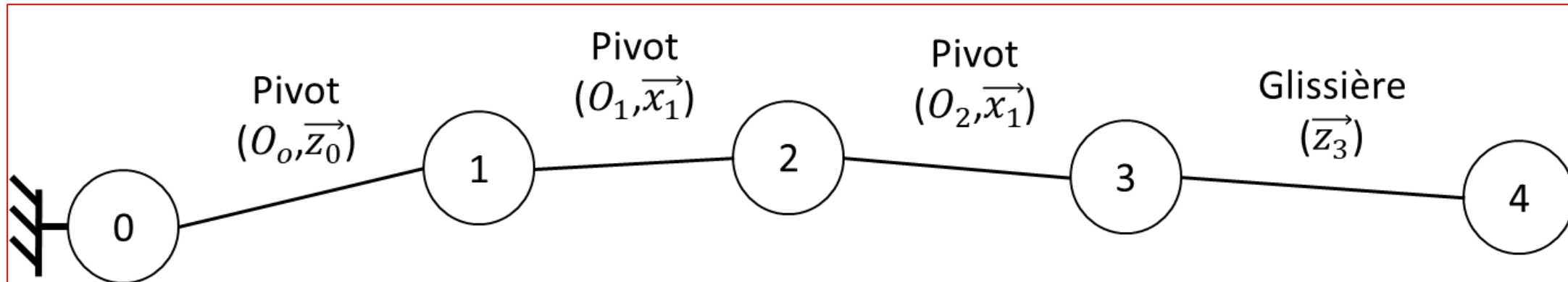
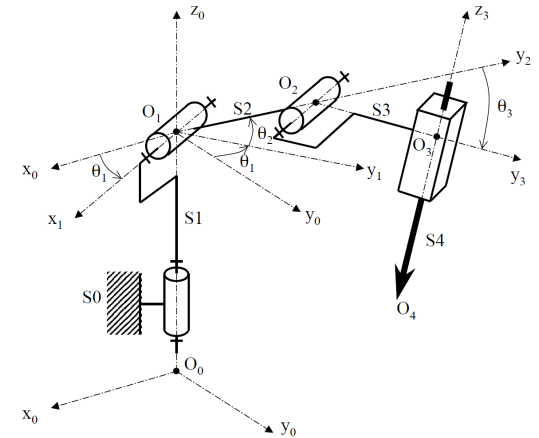


# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Chaînes de solides

Chaîne ouverte

Graphe des liaisons :



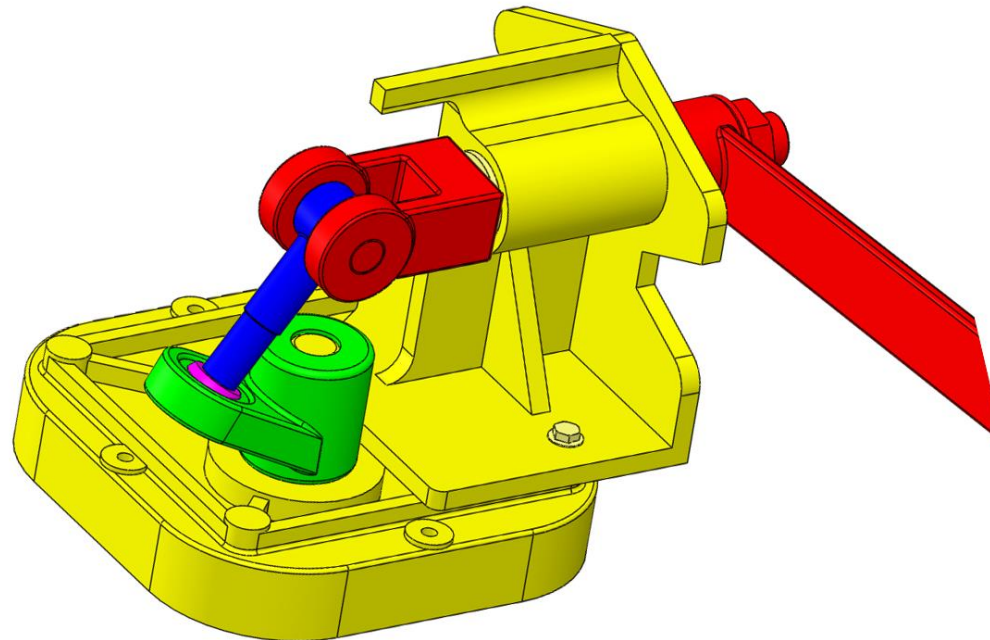
# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Chaînes de solides

### Chaîne fermée

Définition : Chaîne fermée → graphe des liaisons → boucle / cycle

Exemple : Barrière sinusmatique

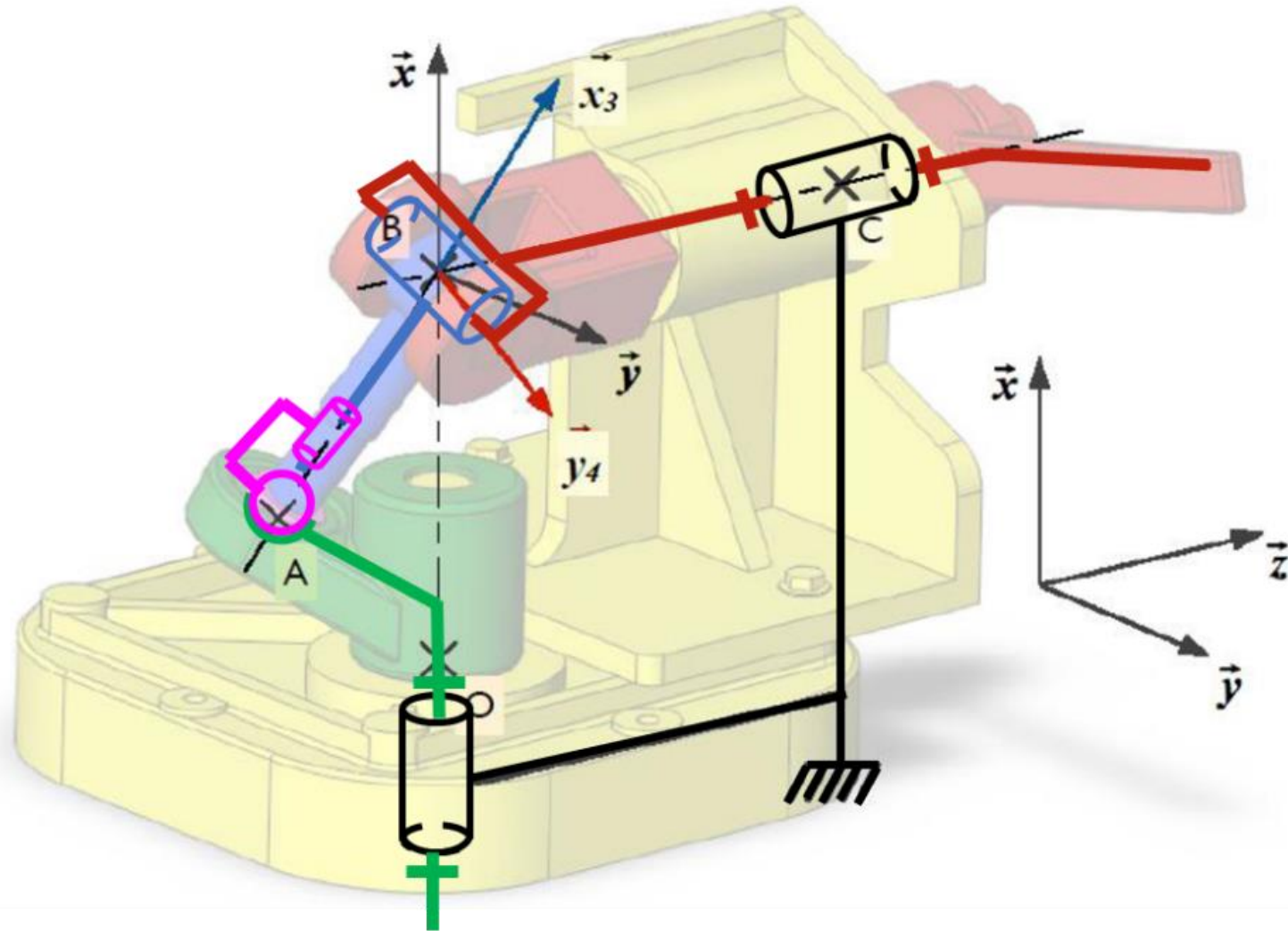


# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Chaînes de solides

Chaîne fermée

Schéma cinématique :

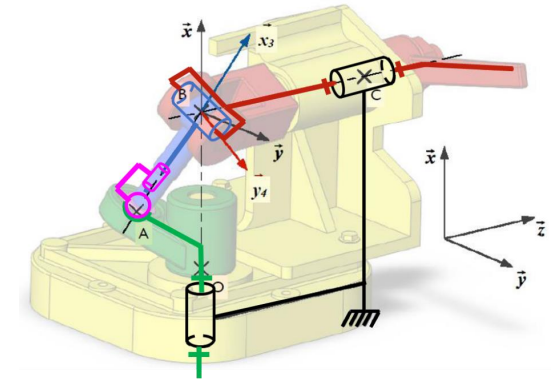
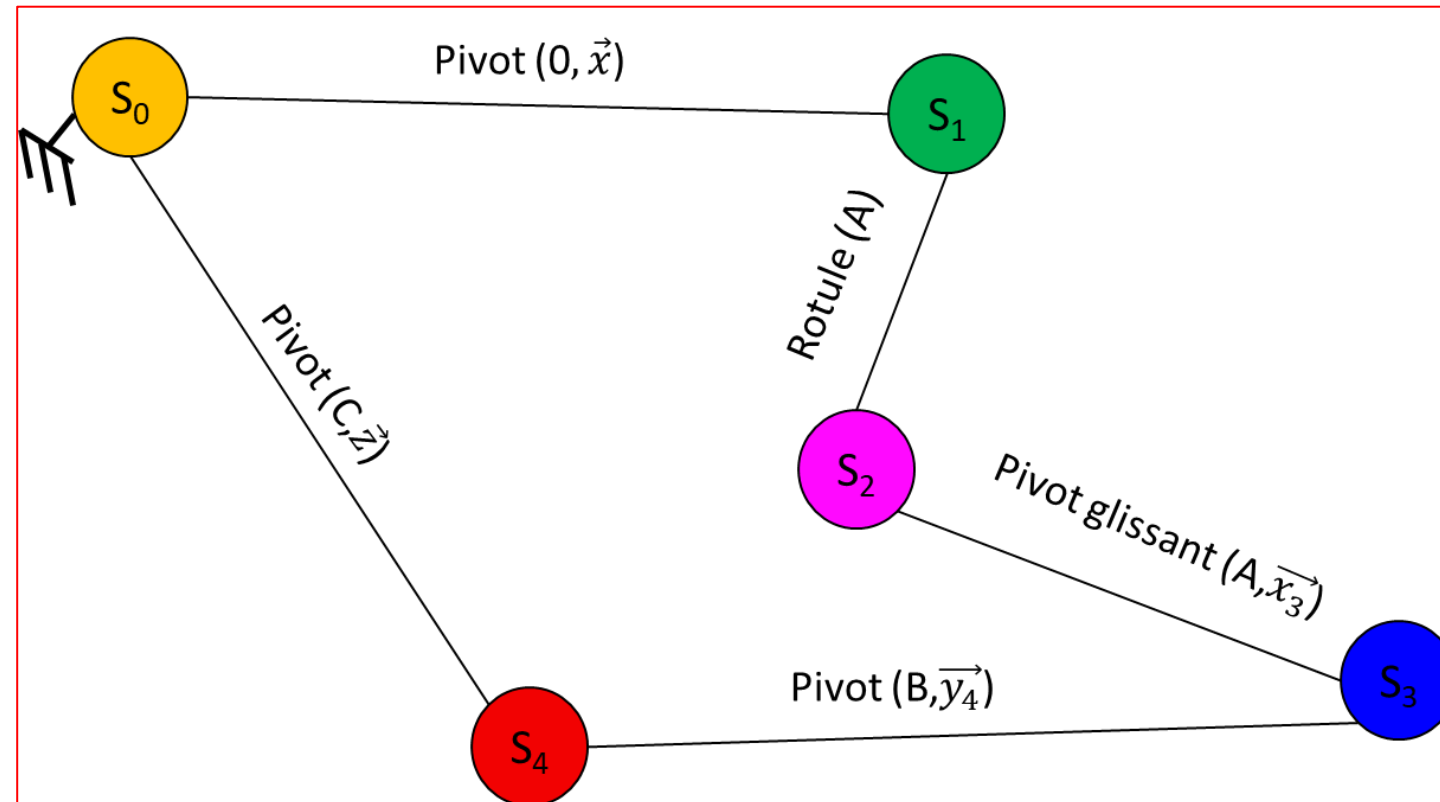


# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Chaînes de solides

Chaîne fermée

Graphe des liaisons :



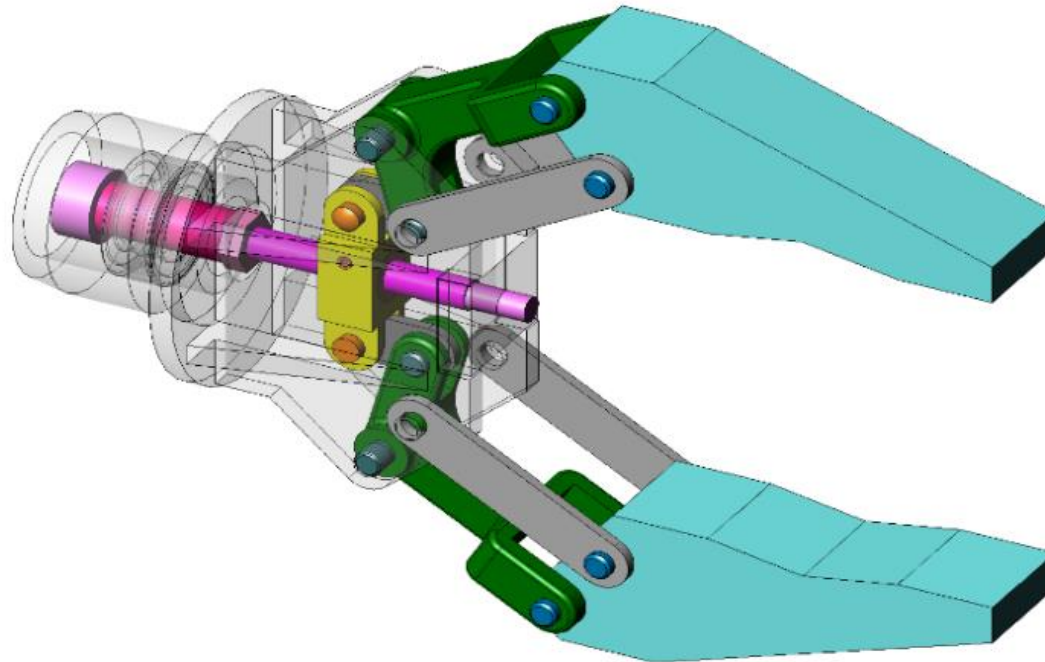
# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Chaînes de solides

### Chaîne complexe

Définition : Chaîne complexe  $\rightarrow$  graphe des liaisons  $\rightarrow$  cycles imbriqués (+ chaînes ouvertes)

Exemple : Pince d'un robot

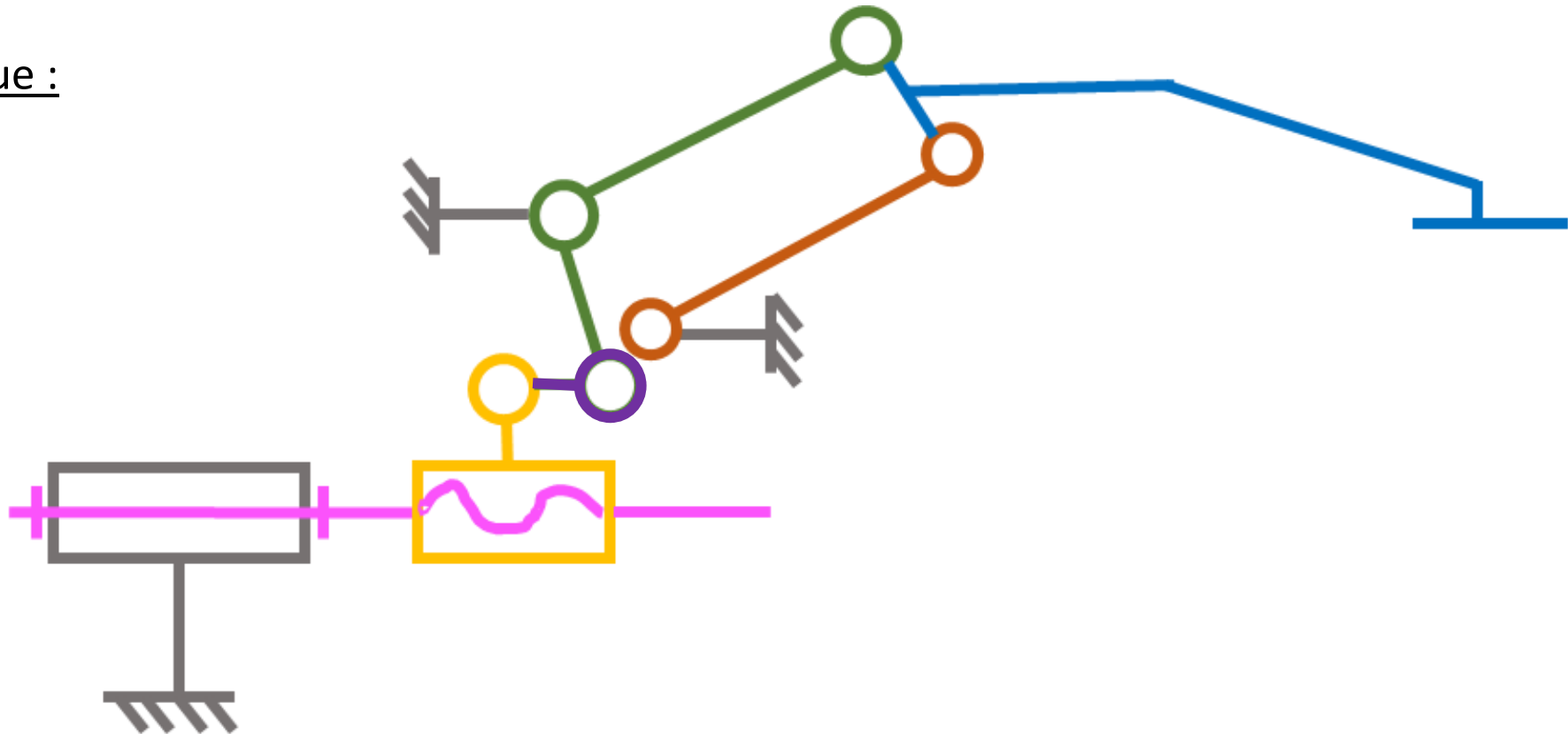


# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Chaînes de solides

Chaîne complexe

Schéma cinématique :



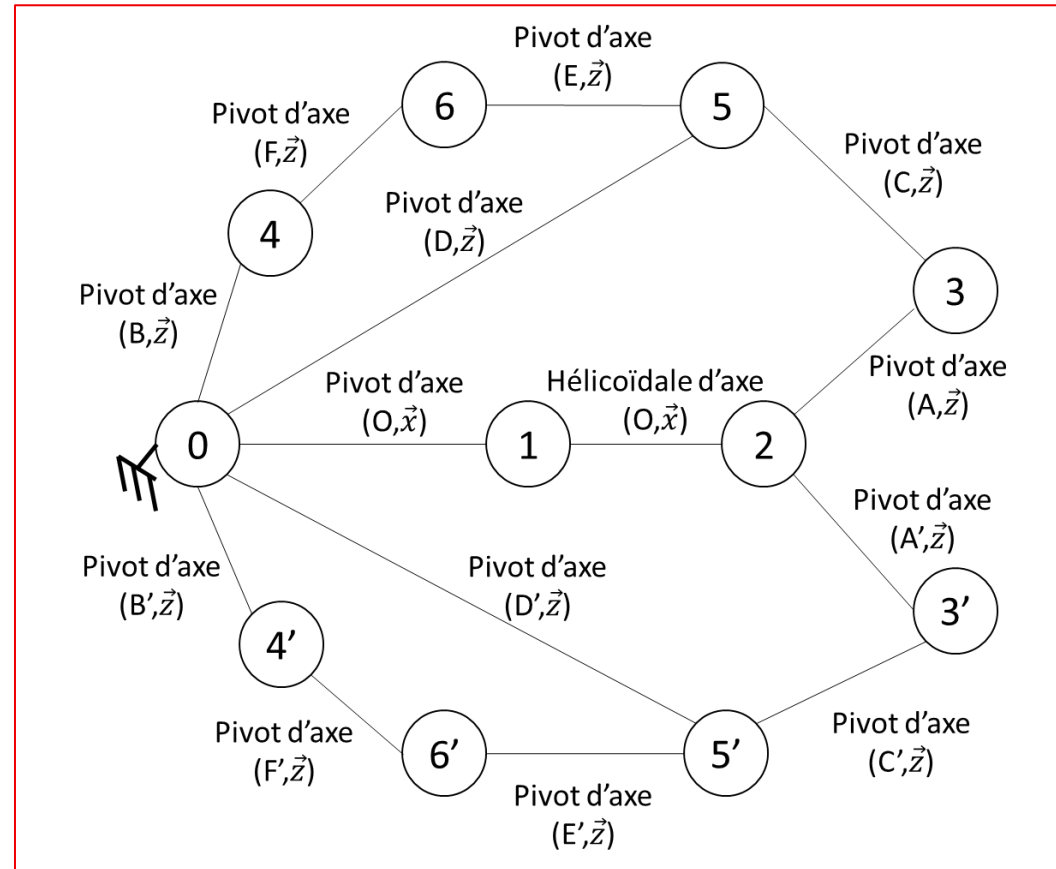


# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Chaînes de solides

Chaîne complexe

Graphe des liaisons :



10 cycles mais seulement 4 cycles indépendants :  $0-5-6-4-0$ ,  $0-5-3-2-1-0$ ,  $0-1-2-3'-5'-0$  et  $0-5'-6'-4'-0$

# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Nombre cyclomatique

Définition : Le nombre cyclomatique  $\gamma$  est le nombre de boucles indépendantes du graphe des liaisons d'un mécanisme.

$l$  : nombre de liaisons du graphe des liaisons

$p$  : nombre de solides du graphe des liaisons

$$\gamma = l - p + 1$$

Nombre cyclomatique  $\rightarrow$  connaître le nombre d'équations en cinématique ( $6 * \gamma$  équations)

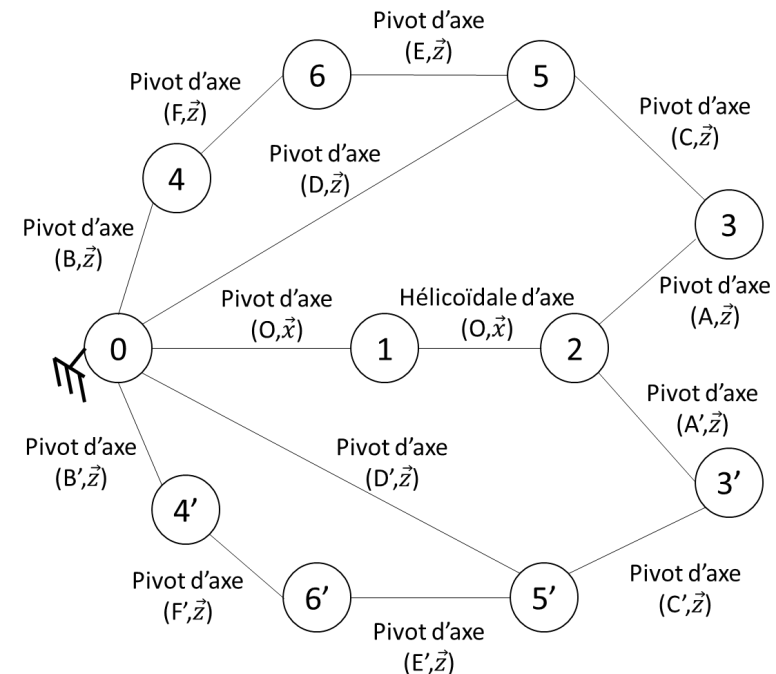
# Rappels de mécanique (VOIR COURS DE SUP')

## Nombre cyclomatique

Vérifions sur notre exemple :

Pince du robot  $\rightarrow$  11 solides + 14 liaisons  $\rightarrow l = 14$  et  $p = 11$

$\gamma = 14 - 11 + 1 = 4$  cycles indépendants.



# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Torseur

$$\{V_{R_1/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \\ \overrightarrow{V_{A \in R_1/R}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{array} \right\}_{A,R}$$

$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$  : vecteur (taux de) rotation du solide 1 par rapport au repère R

$\overrightarrow{V_{A \in R_1/R}}$  : vitesse du point A appartenant au solide 1 par rapport repère R

**Attention** : Pour faire la somme de deux torseurs, ils doivent être écrits au même point ! !

# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

### Dérivation vectorielle

$$\left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{U_1} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{U_1} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{U_1}$$

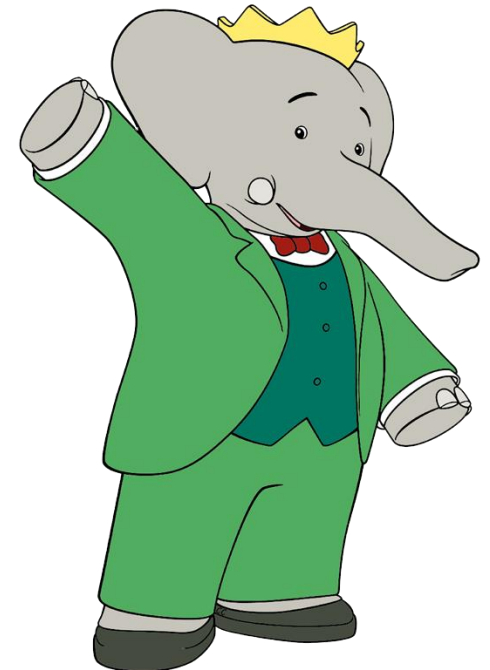
# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Formule de changement de point / Varignon (BABAR)

$$\overrightarrow{V_{B \in R_1 / R}} = \overrightarrow{V_{A \in R_1 / R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_1 / R}}$$

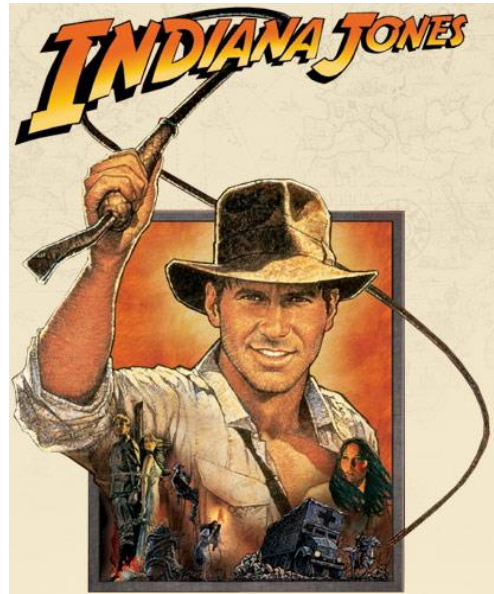
**(BABAR)**



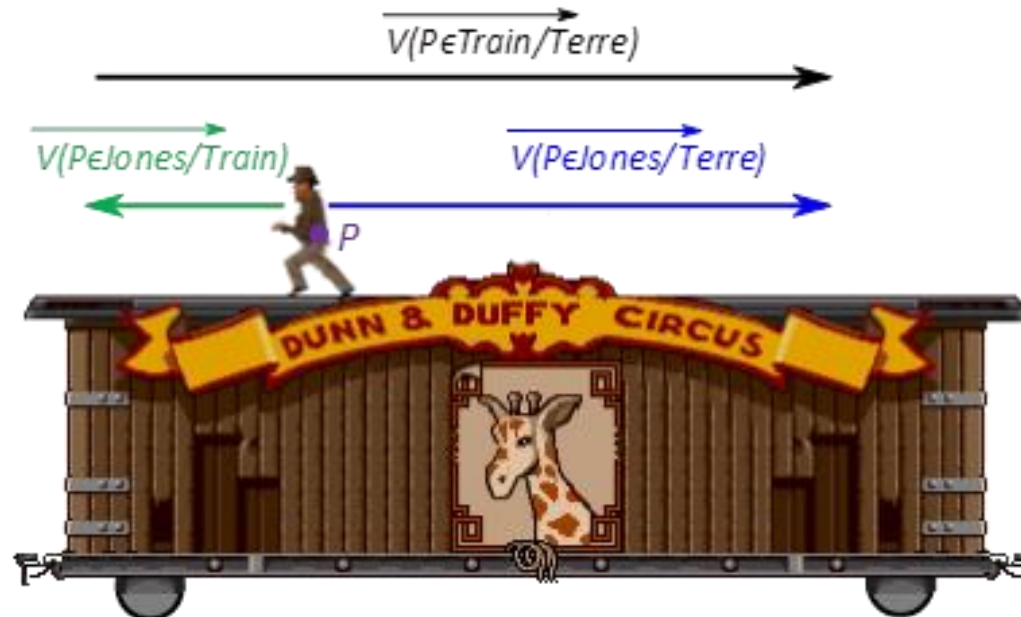
# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Composition des mouvements (« Indiana Jones ») :



$$\overrightarrow{V(P \in \text{Jones}/\text{Terre})} = \overrightarrow{V(P \in \text{Jones}/\text{Train})} + \overrightarrow{V(P \in \text{Train}/\text{Terre})}$$



# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Composition des mouvements (« Indiana Jones ») :

$$\{\mathbf{V}_{2/0}\} = \{\mathbf{V}_{2/1}\} + \{\mathbf{V}_{1/0}\}$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0}$$

$$\overrightarrow{V}_{A \in 2/0} = \overrightarrow{V}_{A \in 2/1} + \overrightarrow{V}_{A \in 1/0}$$



# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Condition de roulement sans glissement en I de S2/S1

$$\overrightarrow{V_{I \in S_2 / S_1}} = \vec{0}$$

# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Condition de maintien du contact

$$\overrightarrow{V_{I \in S_2 / S_1}} \cdot \vec{n} = 0$$

# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

### Calcul de vitesse

Décomposer la vitesse en mouvements élémentaires (rotation ou translation) grâce à la relation de composition des vecteurs vitesse.

$$\underline{\text{Ex:}} \overrightarrow{V(M \in 3/0)} = \overrightarrow{V(M \in 3/2)} + \overrightarrow{V(M \in 2/1)} + \overrightarrow{V(M \in 1/0)}$$

- Mouvement élémentaire = **rotation** → **formule de changement de point** en passant par **un point appartenant à l'axe de rotation** (vitesse nulle sur l'axe de rotation).

$$\underline{\text{Ex:}} \overrightarrow{V(M \in 1/0)} = \vec{0} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

- Mouvement élémentaire = **translation** → vitesse est la même pour tous les points du solide → **formule de dérivation vectorielle**.

$$\underline{\text{Ex:}} \overrightarrow{V(M \in 2/1)} = \overrightarrow{V(P \in 2/1)} = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt} \right]_{R_1}$$

**Autre méthode (plus rapide)** : → **dérivée du paramètre qui varie, selon l'axe du mouvement** : si le point M varie de  $x(t)$  dans le sens  $\vec{x}$  alors  **$\overrightarrow{V(M \in 2/1)} = \dot{x}(t) \cdot \vec{x}$**

- Mouvement = **combinaison de rotation(s) et de translation(s)** → **point du solide pour lequel on peut trouver la vitesse par dérivation vectorielle (attention aux conditions d'appartenance) ou point pour lequel la vitesse est donnée** → **relation de changement de point**.

$$\underline{\text{Ex:}} \overrightarrow{V(M \in 3/2)} = \overrightarrow{V(B \in 3/2)} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \text{ (composition des vecteurs rotation } \rightarrow \overrightarrow{\Omega_{3/2}}).$$

# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

### Loi Entrée/Sortie

#### **Géométrie :**

- Fermeture géométrique avec CHASLES
- Projection dans la base de référence
- Elimination d'un des paramètres (si angle,  $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ )
- Dérivation pour avoir la loi E/S cinématique

#### **Cinématique :**

- Fermeture cinématique (composition des mouvements)
- Choix du point de réduction de tous les torseurs
- Ecriture des 6 équations

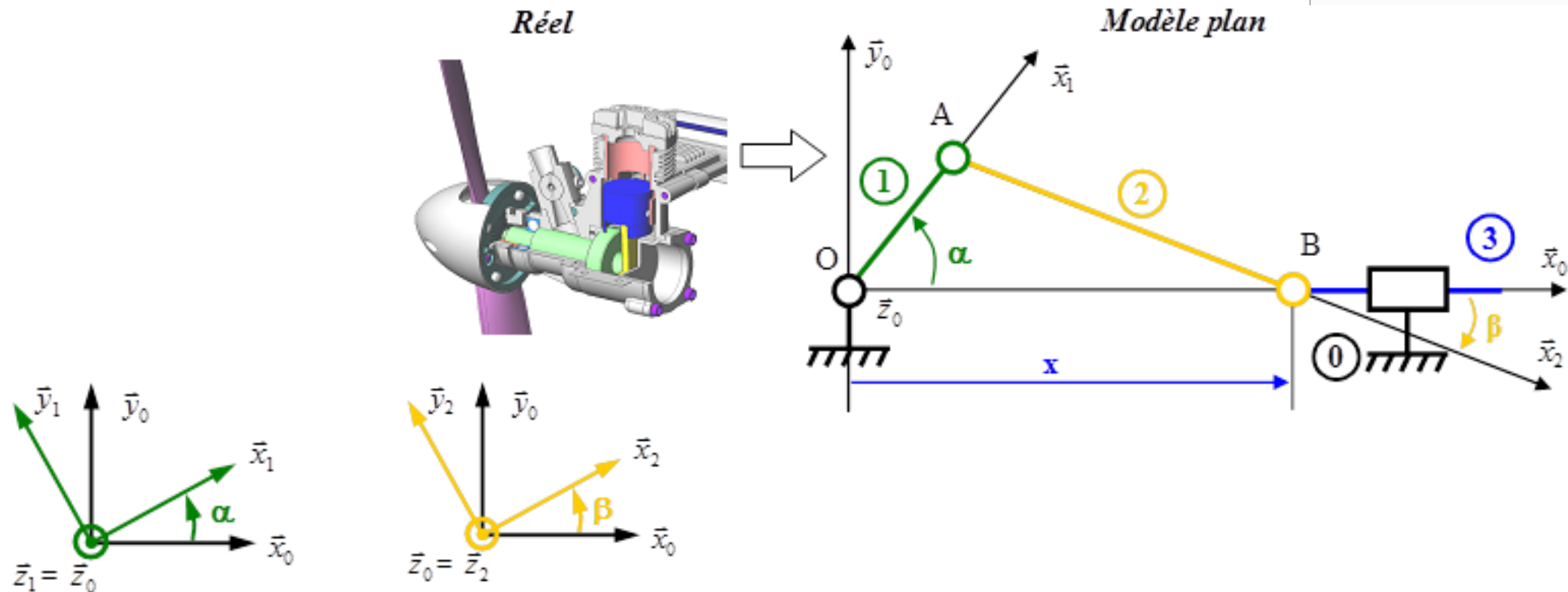
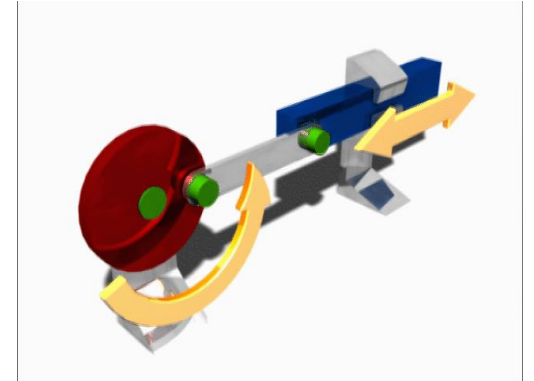
*(Autant de fermetures à faire qu'il y a de cycles indépendants)*

# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

Loi Entrée/Sortie

Exemple : Piston/bielle/manivelle

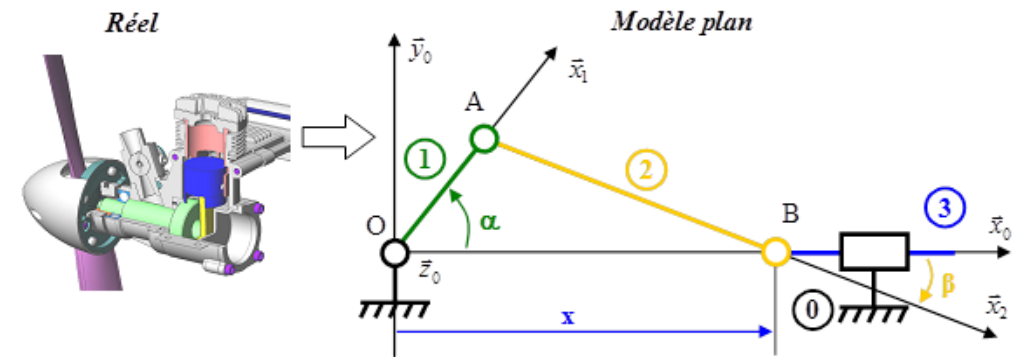


# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

Loi Entrée/Sortie

Exemple : Piston/bielle/manivelle



Fermeture géométrique :  $\overrightarrow{OO}$  est nul :  $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

Soit  $L_1 \cdot \vec{x}_1 + L_2 \cdot \vec{x}_2 - x \cdot \vec{x}_0 = \vec{0}$

Projection sur les axes  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  :

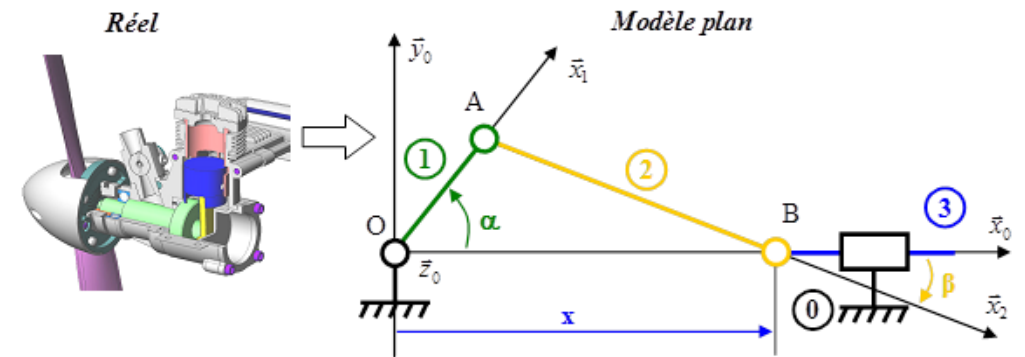
$$\begin{cases} L_1 \cdot \cos \alpha + L_2 \cdot \cos \beta - x = 0 \\ L_1 \cdot \sin \alpha + L_2 \cdot \sin \beta = 0 \end{cases}$$

# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

Loi Entrée/Sortie

Exemple : Piston/bielle/manivelle



→ Combiner en une seule relation

→ Faire disparaître le paramètre intermédiaire  $\beta$ .

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\beta = \frac{x - L_1 \cdot \cos\alpha}{L_2} \\ \sin\beta = \frac{-L_1 \cdot \sin\alpha}{L_2} \end{cases} \quad \text{et } \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

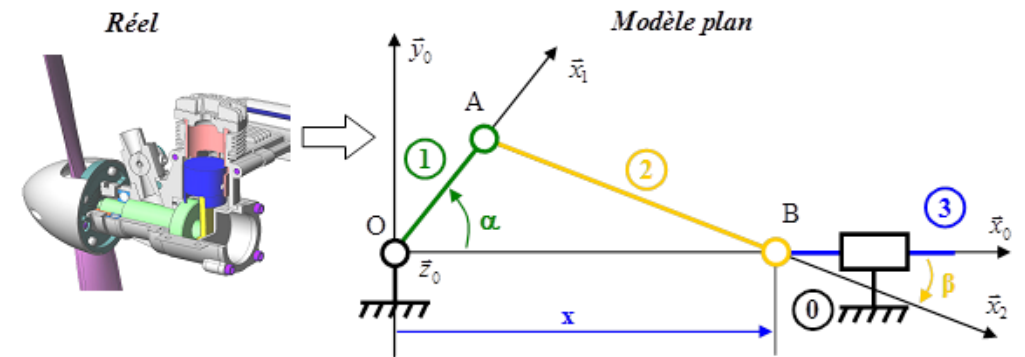
$$\rightarrow \left( \frac{x - L_1 \cdot \cos\alpha}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{-L_1 \cdot \sin\alpha}{L_2} \right)^2 = 1 \rightarrow (x - L_1 \cdot \cos\alpha)^2 = L_2^2 - (L_1 \cdot \sin\alpha)^2$$

# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

Loi Entrée/Sortie

Exemple : Piston/bielle/manivelle



Soit la loi d'entrée sortie :

$$x = L_1 \cdot \cos \alpha + \sqrt{L_2^2 - (L_1 \cdot \sin \alpha)^2}$$

Cette relation n'est valable que pour  $L_2 > L_1$ .



# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

Loi Entrée/Sortie

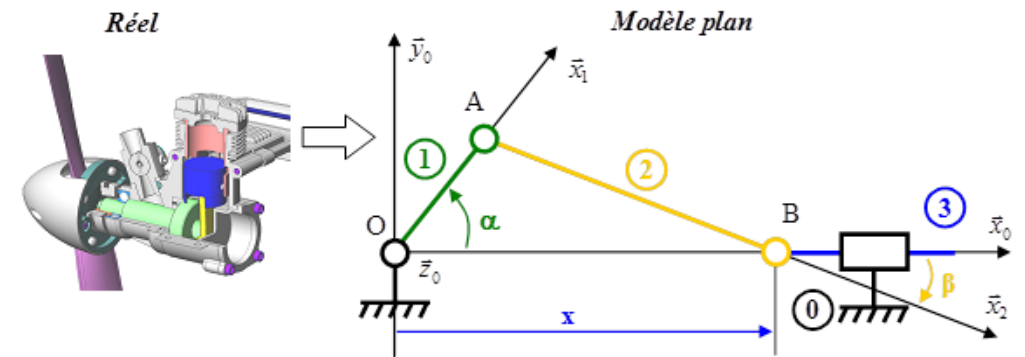
Exemple : Piston/bielle/manivelle

Fermeture cinématique :

$$\{V_{0/3}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\} = \{0\}$$

$$\text{Soit : } \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 0/3}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A \in 0/3}} + \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \vec{0} \end{cases}$$



# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

### Loi Entrée/Sortie

#### Exemple : Piston/bielle/manivelle

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A \in 0/3}} + \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \vec{0} \end{cases}$$

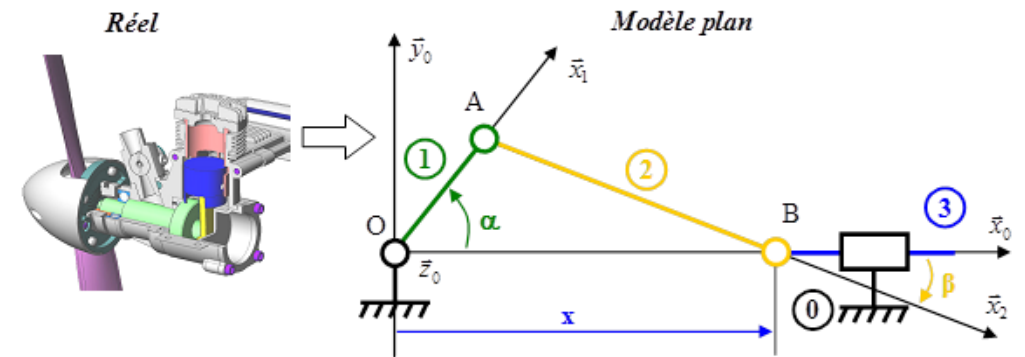
Avec :

$$\overrightarrow{V_{A \in 0/3}} = -\overrightarrow{V_{B \in 3/0}} = -\dot{x} \cdot \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 3/2}} = \overrightarrow{V_{B \in 3/2}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = L_2 \cdot \vec{x}_2 \wedge -\dot{\beta} \cdot \vec{z}_0 = L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$

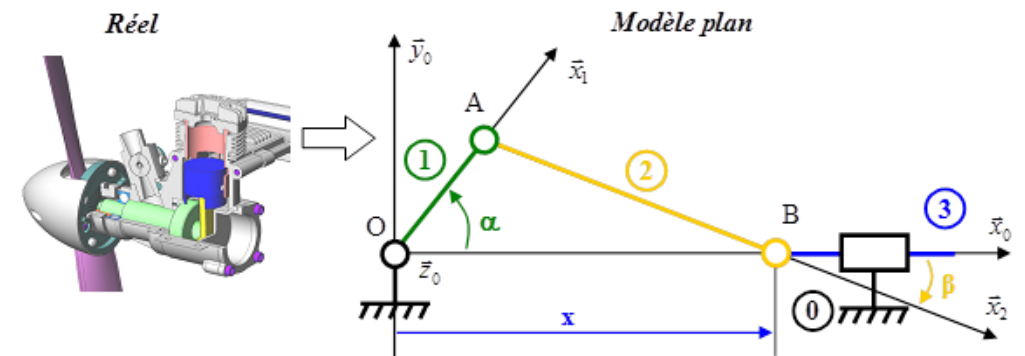


# Rappels de CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

Loi Entrée/Sortie

Exemple : Piston/bielle/manivelle



$$\text{Soit : } -\dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} -L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha - L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta - \dot{x} = 0 \\ L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha + L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta = 0 \end{cases}$$

→ 2 équations scalaires = dérivée des 2 équations scalaires de la fermeture géométrique

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Torseur

$$\{T_{2 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{M_{C, 2 \rightarrow 1}} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{cc} R_x & M_{cx} \\ R_y & M_{cy} \\ R_z & M_{cz} \end{array} \right\}_{C,R}$$

$\overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}}$  : Résultante du torseur des actions mécaniques du solide 2 sur le solide 1

$\overrightarrow{M_{C, 2 \rightarrow 1}}$  : Moment au point C du torseur des actions mécaniques du solide 2 sur le solide 1.

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Torseur

Torseur glisseur

$$\{\mathbf{T}_{ext \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{ext \rightarrow S}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

Torseur

Torseur couple

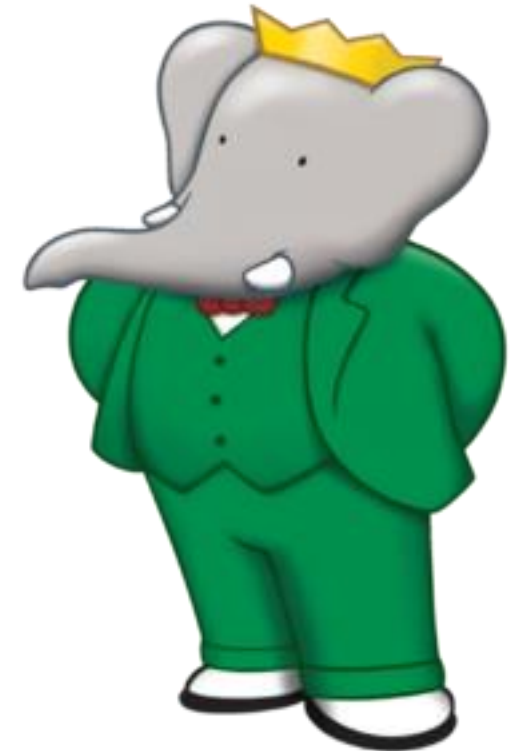
$$\{\mathbf{T}_{ext \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathbf{M}_{A, ext \rightarrow S}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathbf{M}} \end{array} \right\}_A$$

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Relation de changement de point (BABAR)

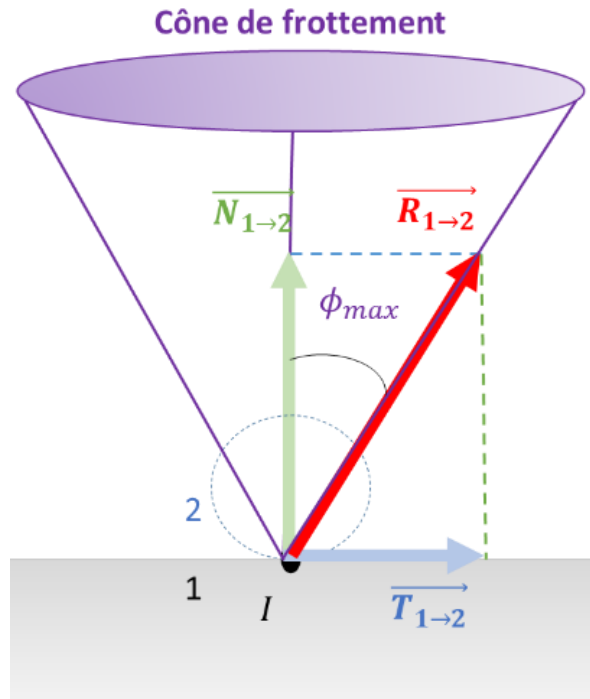
$$\overrightarrow{M_{B,2 \rightarrow 1}} = \overrightarrow{M_{A,2 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}}$$



# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

### Frottements et loi de Coulomb



$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  ne peut JAMAIS SORTIR du cône de frottement

Loi de Coulomb  $\left\| \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \right\| = f \cdot \left\| \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \right\|$  avec  $f = \tan \phi_{max}$

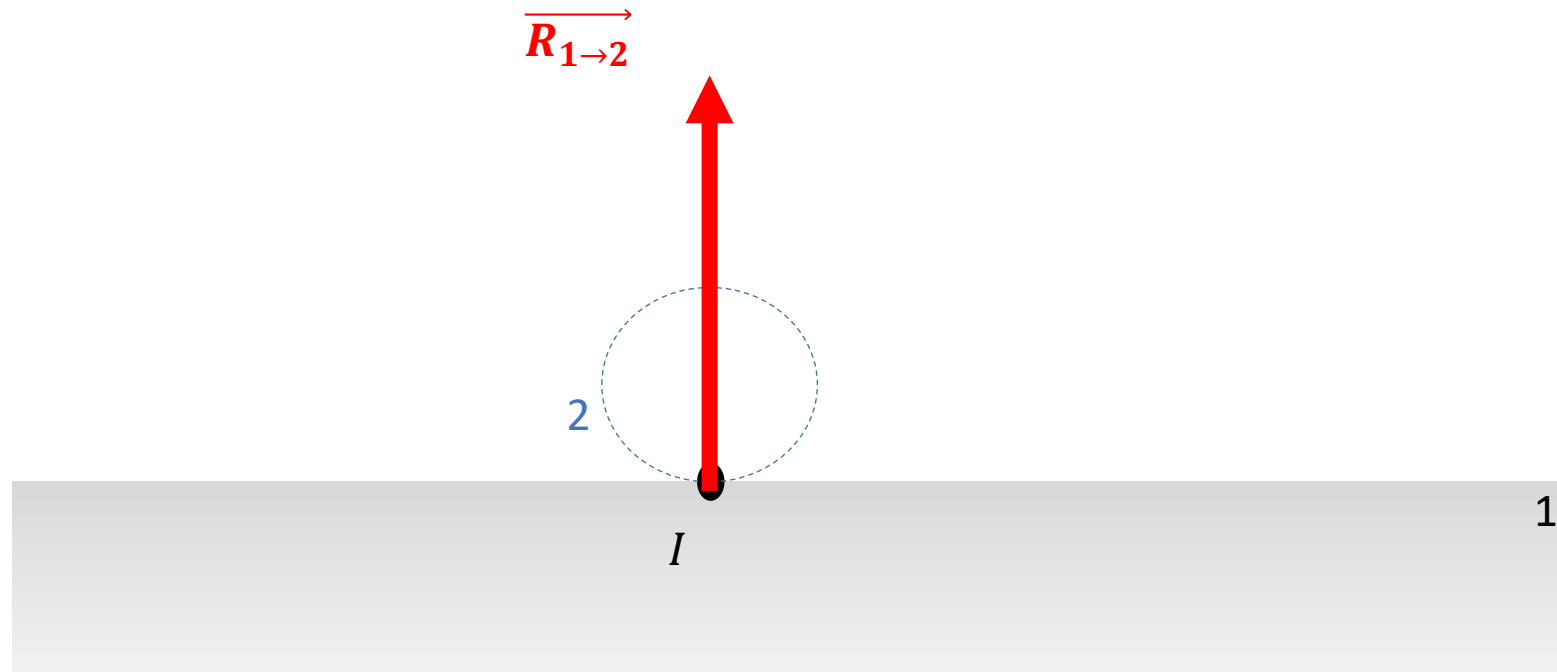


# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Frottements et loi de Coulomb

**PAS de mouvement**  
**PAS de frottement**



# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

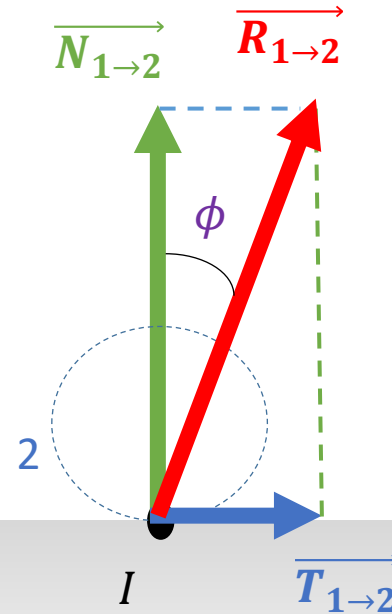
Frottements et loi de Coulomb

**PAS de mouvement**  
**Frottement**

$\overrightarrow{V(I \in 2/1)}$



$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \vec{0} \end{array} = N_{12} \cdot \vec{n} + T_{12} \cdot \vec{t} \right\}_I$$



# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

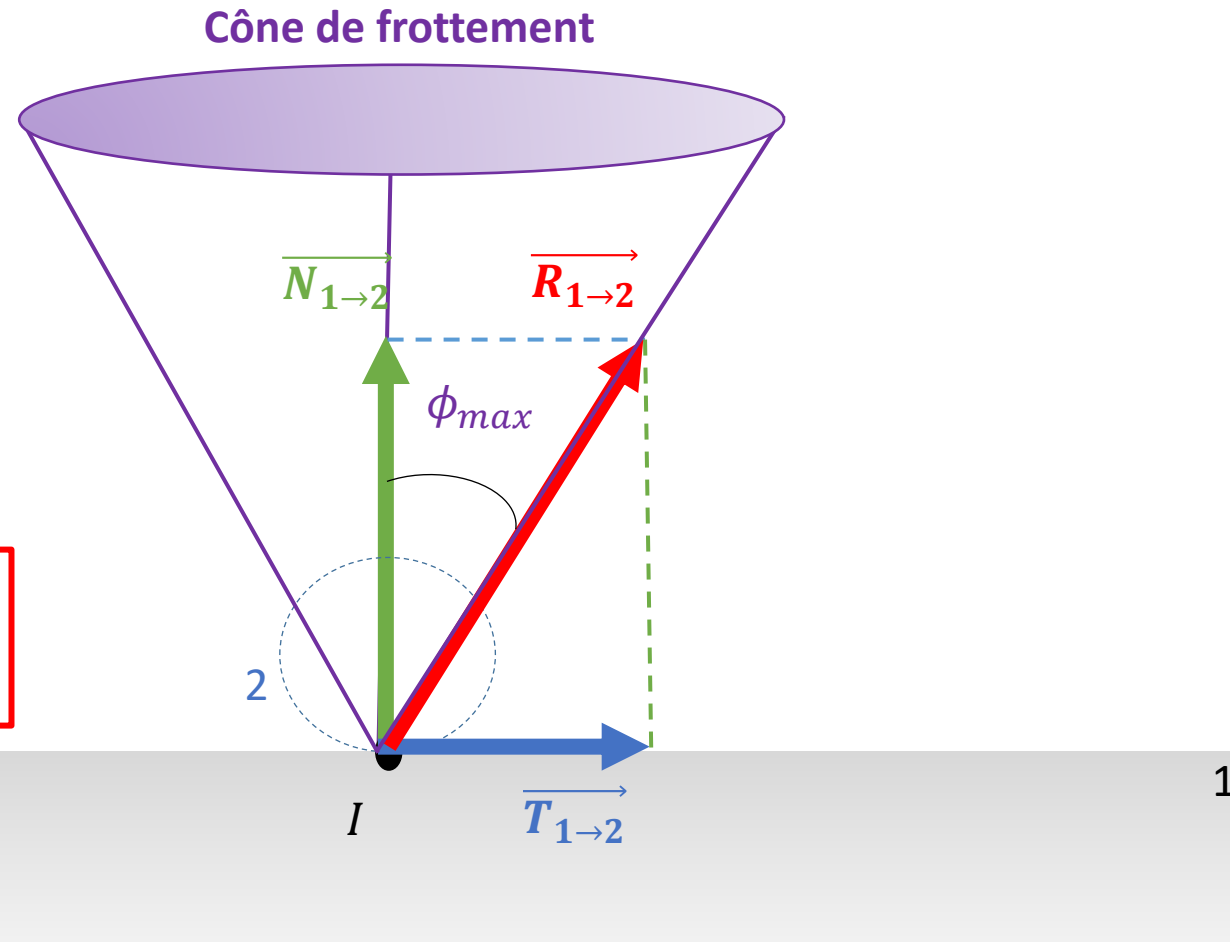
Frottements et loi de Coulomb

**A LA LIMITE DU GLISSEMENT**  
**(PAS de mouvement)**  
**Frottement**

$\overrightarrow{V(I \in 2/1)}$

$$f = \tan \phi_{max}$$

$\phi_{max}$  = Angle de frottement



# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

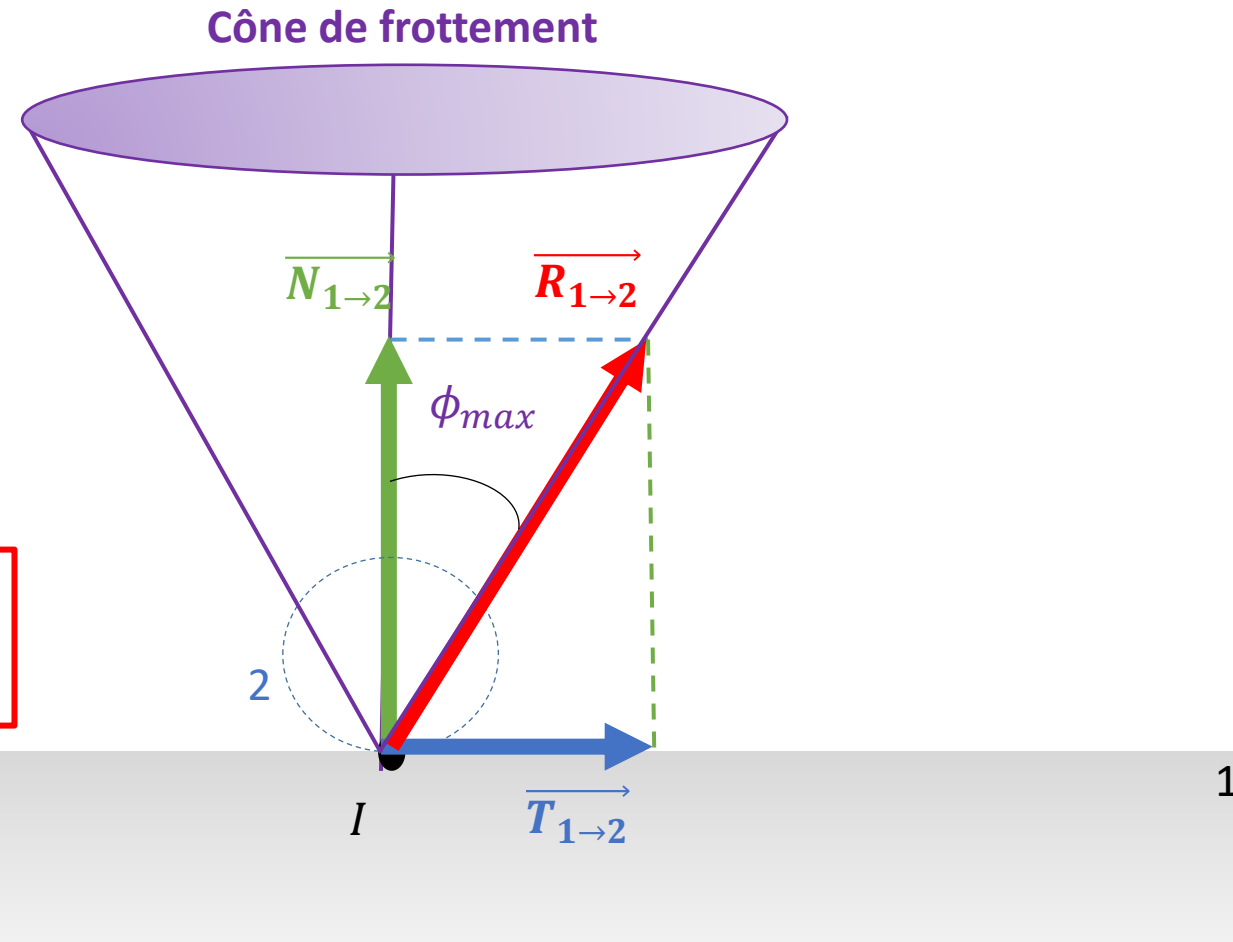
Frottements et loi de Coulomb

**GLISSEMENT (mouvement)**  
**Frottement**

$\overrightarrow{V(I \in 2/1)}$

$$f = \tan \phi_{max}$$

$\phi_{max}$  = Angle de frottement



# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Frottements et loi de Coulomb

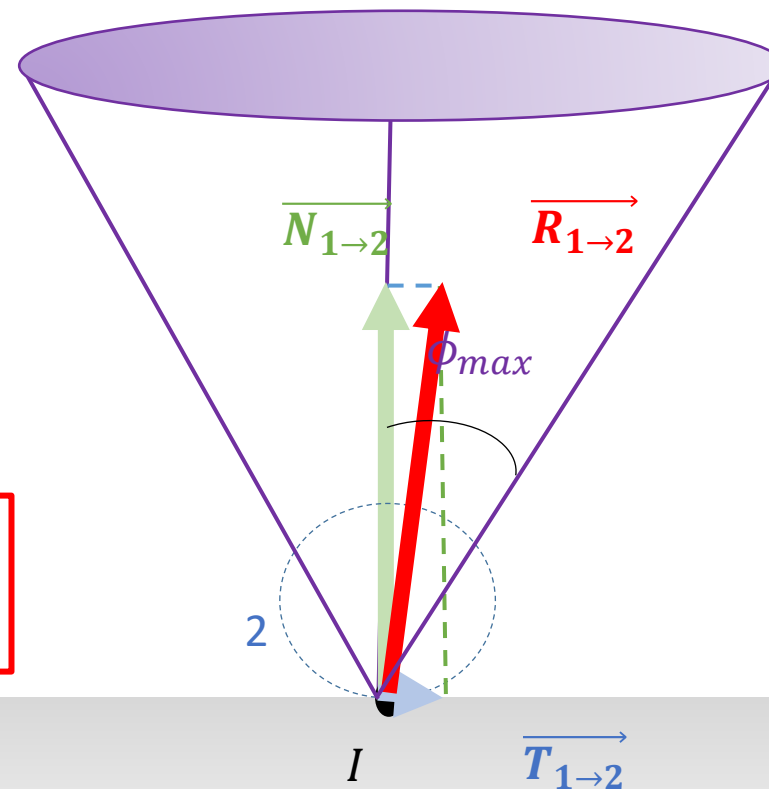
**PAS de mouvement**  
**Frottement**



$$f = \tan \phi_{max}$$

$\phi_{max}$  = Angle de frottement

Cône de frottement



**Cas du non glissement (RSG, adhérence) :**

2 ne glisse pas sur 1 :  $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \vec{0}$

Connait ~~exactement~~  $\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}$  (direction et sens)

$$\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| < f \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$$

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Frottements et loi de Coulomb

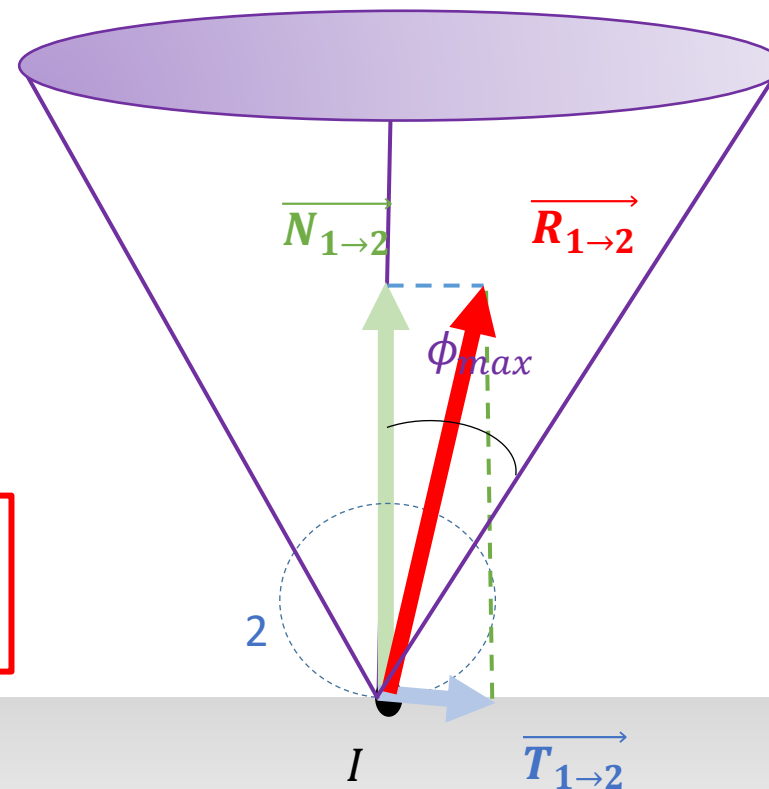
**PAS de mouvement**  
**Frottement**



$$f = \tan \phi_{max}$$

$\phi_{max}$  = Angle de frottement

Cône de frottement



**Cas du non glissement (RSG, adhérence) :**

2 ne glisse pas sur 1 :  $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \vec{0}$

Connait ~~exactement~~  $\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}$  (direction et sens)

$$\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| < f \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$$

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Frottements et loi de Coulomb

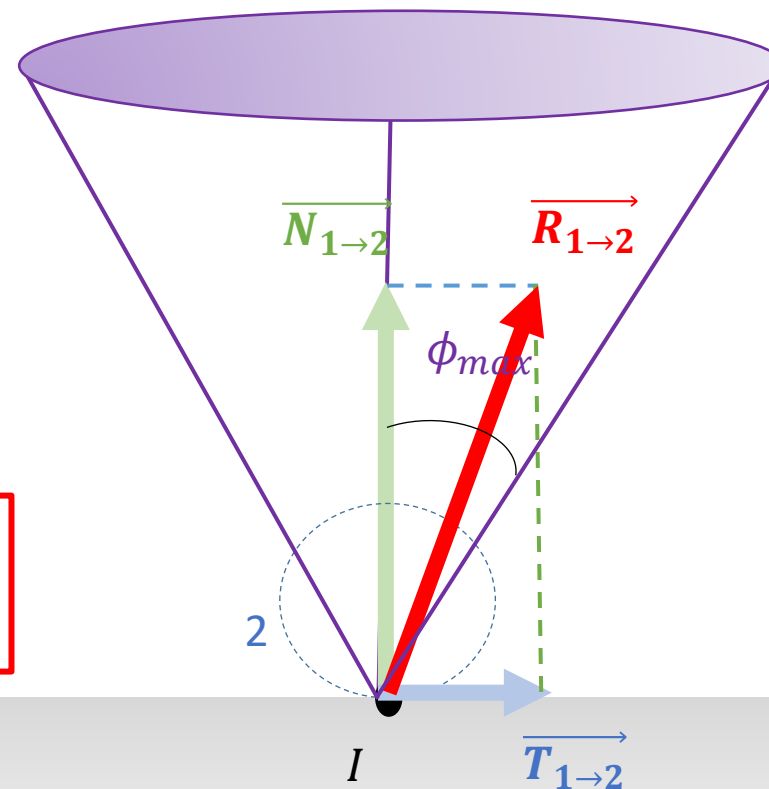
**PAS de mouvement**  
**Frottement**



$$f = \tan \phi_{max}$$

$\phi_{max}$  = Angle de frottement

Cône de frottement



**Cas du non glissement (RSG, adhérence) :**

2 ne glisse pas sur 1 :  $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \vec{0}$

Connait exactement  $\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}$  (direction et sens)

$$\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| < f \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$$

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Frottements et loi de Coulomb

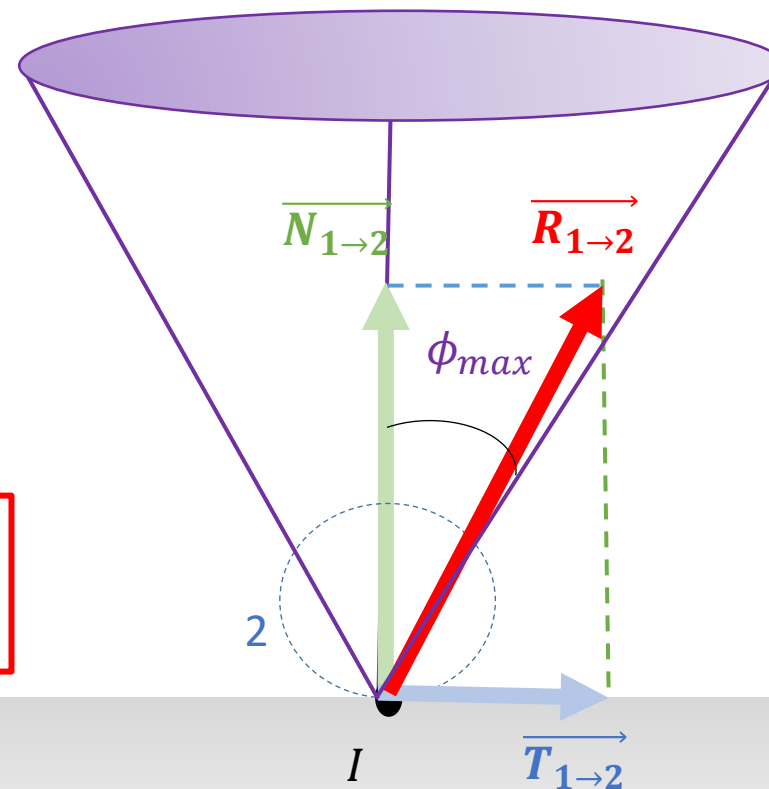
**PAS de mouvement**  
**Frottement**



$$f = \tan \phi_{max}$$

$\phi_{max}$  = Angle de frottement

Cône de frottement



**Cas du non glissement (RSG, adhérence) :**

2 ne glisse pas sur 1 :  $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \vec{0}$

Connait ~~exactement~~  $\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}$  (direction et sens)

$$\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| < f \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$$



# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

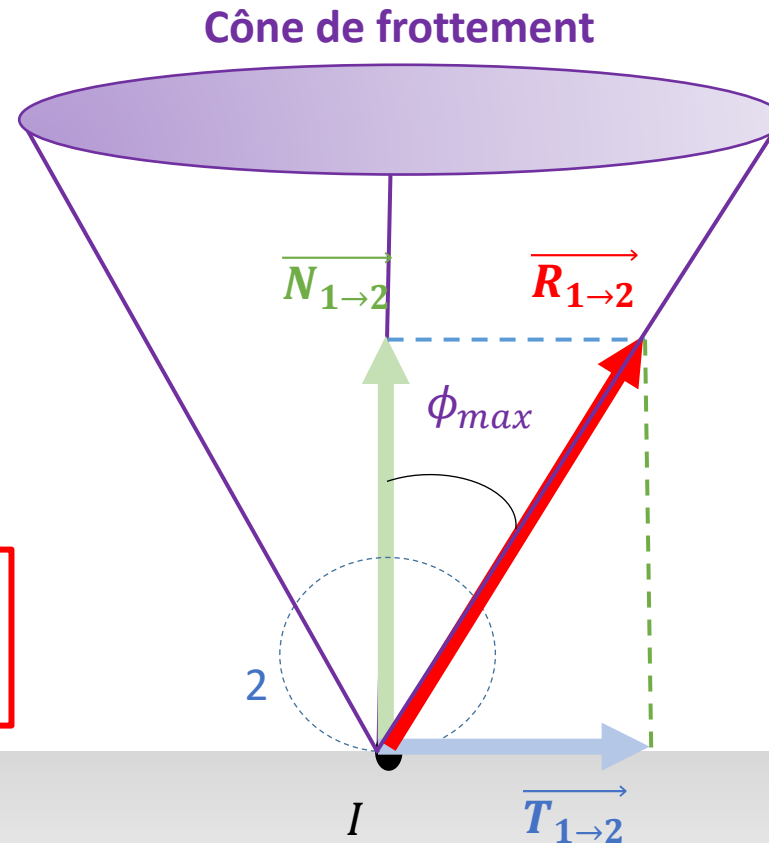
Frottements et loi de Coulomb

**A LA LIMITE DU GLISSEMENT**  
(PAS de mouvement)  
**Frottement**



$$f = \tan \phi_{max}$$

$\phi_{max}$  = Angle de frottement



**Utilisation pratique des lois de Coulomb :**

**Equilibre + Limite du glissement**

$$\rightarrow \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}} = \text{Opposé à } \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} :$$

$$\rightarrow \overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} < 0$$

$$\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| = f \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$$

$\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$  est SUR le cône de frottement

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Frottements et loi de Coulomb

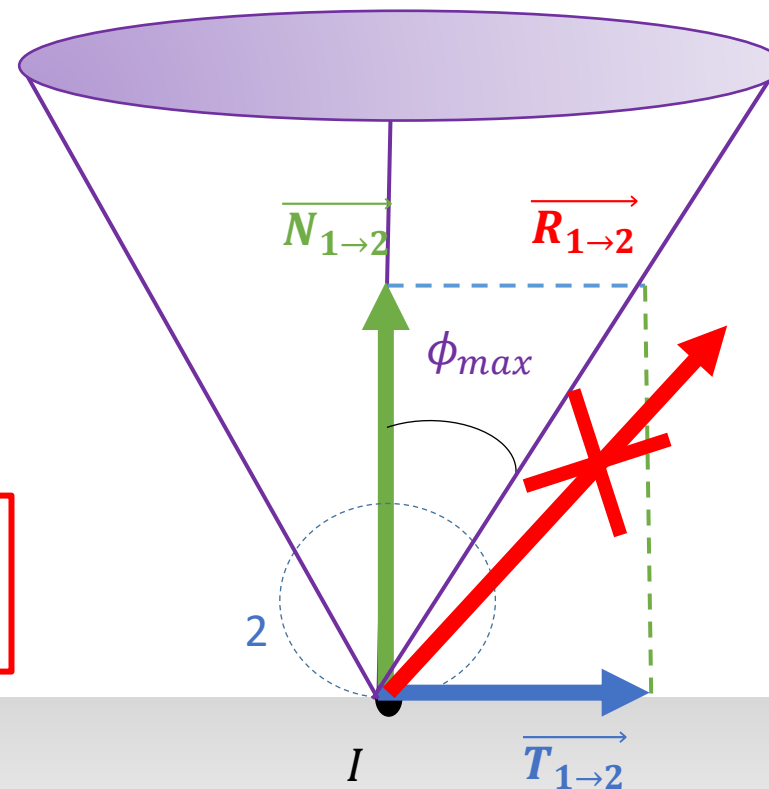
**GLISSEMENT (mouvement)**  
Frottement

$\overrightarrow{V(I \in 2/1)}$

$$f = \tan \phi_{max}$$

$\phi_{max}$  = Angle de frottement

Cône de frottement



$$\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| = f \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$$

**IMPOSSIBLE !**

$\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$  NE PEUT PAS SORTIR  
DU CONE DE FROTTEMENT

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Formules importantes

Frottements et loi de Coulomb

**GLISSEMENT (mouvement)**  
**Frottement**

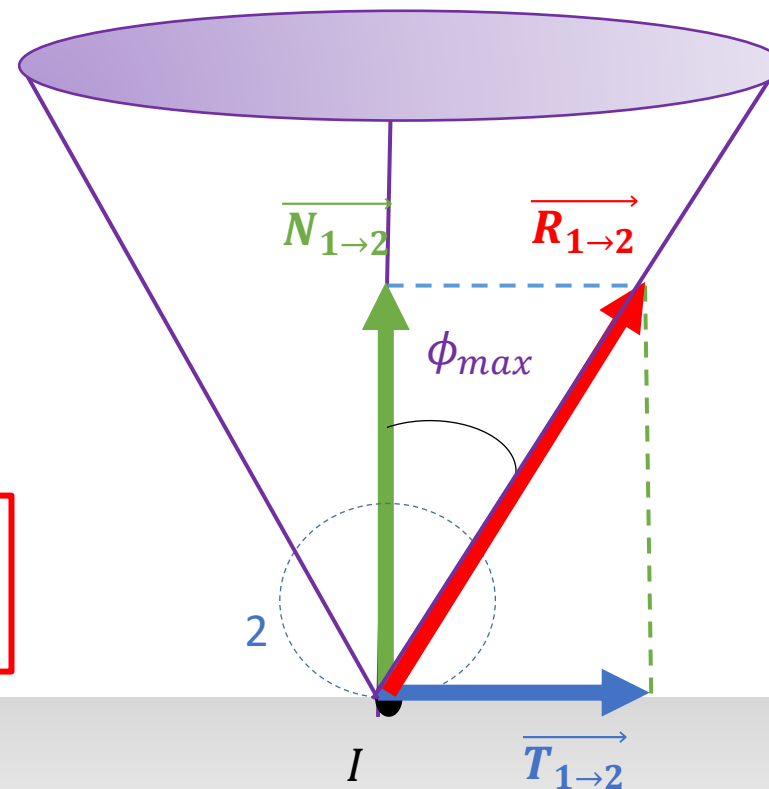
$\overrightarrow{V(I \in 2/1)}$



$$f = \tan \phi_{max}$$

$\phi_{max}$  = Angle de frottement

Cône de frottement



$$\|\overrightarrow{T_{1 \rightarrow 2}}\| = f \cdot \|\overrightarrow{N_{1 \rightarrow 2}}\|$$

$\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$  NE PEUT PAS SORTIR  
DU CONE DE FROTTEMENT

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

## Méthodologie

Théorème de la Résultante Statique (TRS)

$$\overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E}} = \vec{0}$$

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

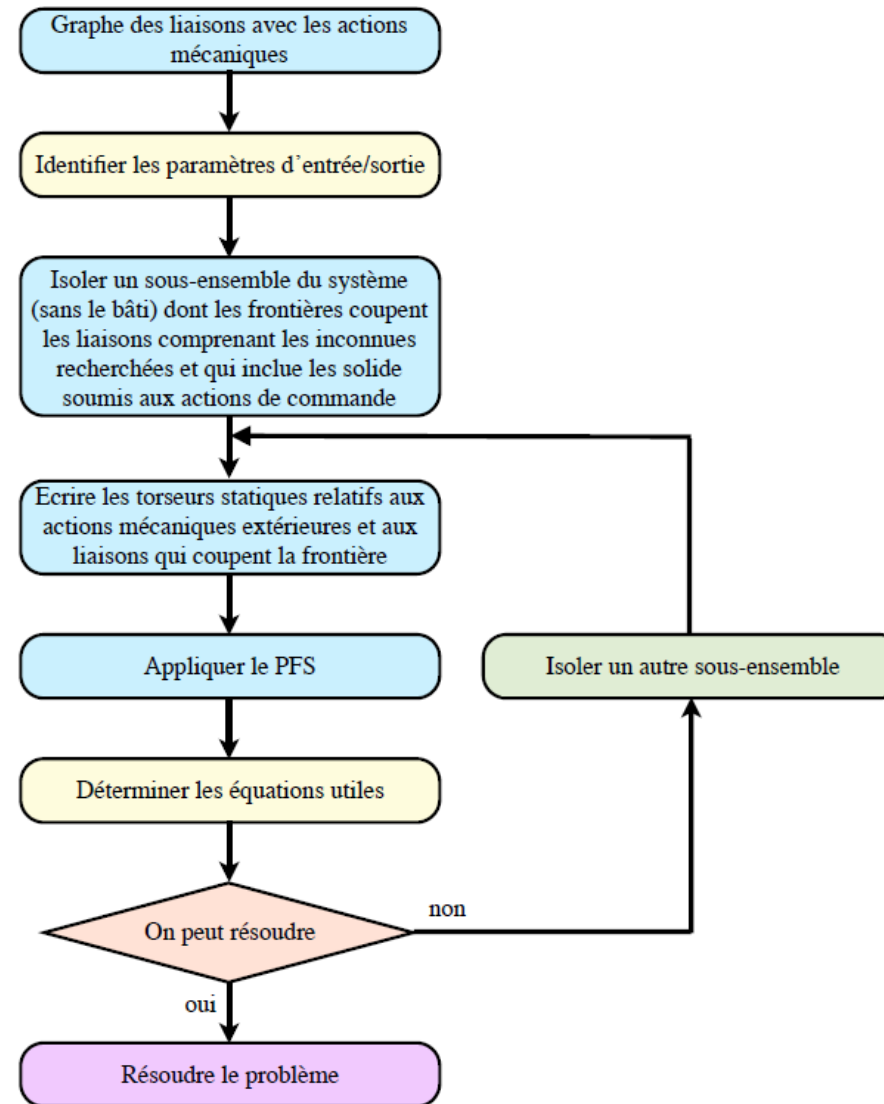
## Méthodologie

Théorème du Moment Statique (TMS)


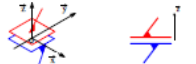

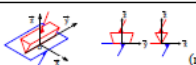

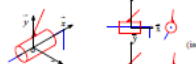

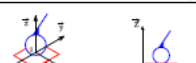





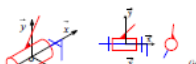

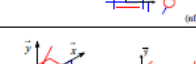

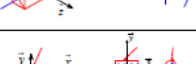

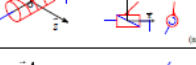


$$\overrightarrow{M_{A, \bar{E} \rightarrow E}} = \vec{0}$$

# Rappels de STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

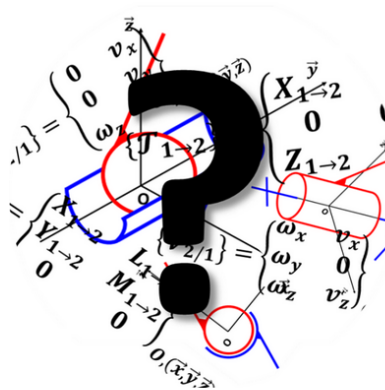
## Méthodologie



# Lien entre la cinématique et la statique

Surfaces en contact	Nom de la liaison	Schématisation Vue isométrique / Vues projetées	Degrés de liberté / Torseur cinématique
Plan/Plan	Liaison appui-plan 		2 translations / 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Cylindre/plan	Liaison linéaire-rectiligne 		2 translations / 2 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Cylindre/cylindre	Liaison pivot-glissant 		1 translation / 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_y & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Sphère/plan	Liaison ponctuelle ou sphère-plan 		2 translations / 3 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Sphère/cylindre	Liaison linéaire-annulaire ou sphère-cylindre 		1 translation / 3 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Sphère/sphère	Liaison rotule ou sphérique 		0 translation / 3 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Composée : cylindre/cylindre et plan/plan	Liaison pivot 		0 translation / 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Composée : plan/plan et plan/plan	Liaison glissière 		1 translation / 0 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Hélicoïde/hélicoïde	Liaison hélicoïdale 		1 translation liée à 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$ Avec $v_x = \frac{p}{2\pi} \omega_z$
Composée : sphère/sphère et cylindre/plan	Liaison sphérique à doigt 		0 translation / 2 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
	Liaison encastrement 		0 translation / 0 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$

[https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai\\_aroux\\_sii.APPLI\\_LIAISONS\\_V2](https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_aroux_sii.APPLI_LIAISONS_V2)



Liaisons ? - Apps on Google Play

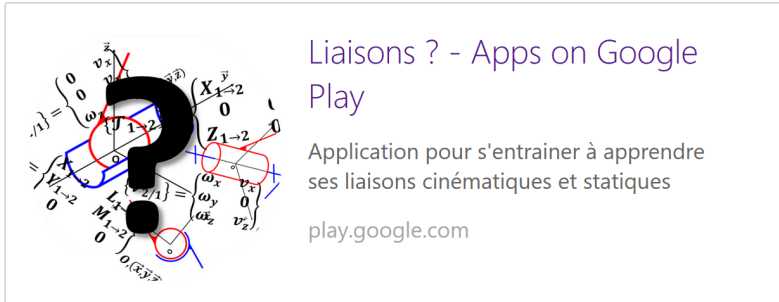
Application pour s'entraîner à apprendre ses liaisons cinématiques et statiques

[play.google.com](https://play.google.com)

**TABLEAU DES LIAISONS A CONNAITRE PAR CŒUR !!!!!**

# Lien entre la cinématique et la statique

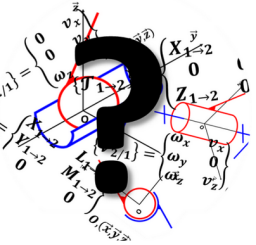
[https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai\\_aroux\\_sii.APPLI\\_LIAISONS\\_V2](https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_aroux_sii.APPLI_LIAISONS_V2)





# Lien entre la cinématique et la statique

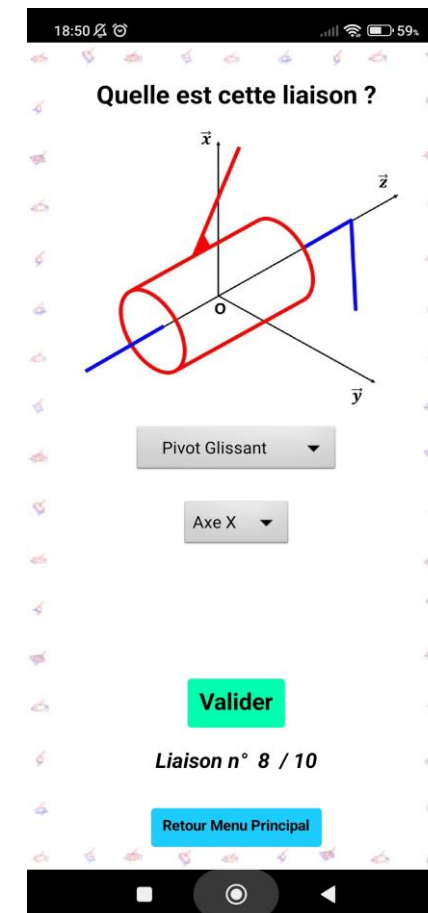
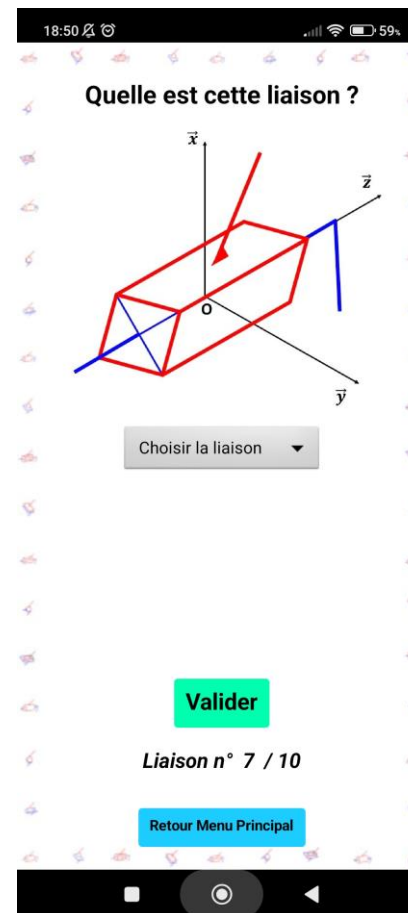
[https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai\\_aroux\\_sii.APPLI\\_LIAISONS\\_V2](https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_aroux_sii.APPLI_LIAISONS_V2)



**Liaisons ? - Apps on Google Play**


Application pour s'entrainer à apprendre ses liaisons cinématiques et statiques

play.google.com



# Lien entre la cinématique et la statique

[https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai\\_aroux\\_sii.APPLI\\_LIAISONS\\_V2](https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_aroux_sii.APPLI_LIAISONS_V2)



**Liaisons ? - Apps on Google Play**

Application pour s'entrainer à apprendre ses liaisons cinématiques et statiques

play.google.com

18:50 59%

Quelle est cette liaison ?

$$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & v_z \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Pivot Glissant ▼

Axe Z ▼

**BRAVO !**

**Liaison suivante**

Liaison n° 5 / 10

Retour Menu Principal

18:51 59%

Quelle est cette liaison ?

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{1 \rightarrow 2} \\ Y_{1 \rightarrow 2} & 0 \\ 0 & N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Glissière ▼

Axe X ▼

Non, c'est une liaison APPUI-PLAN de normale Y

**Liaison suivante**

Liaison n° 8 / 10

Retour Menu Principal

# Lien entre la cinématique et la statique

[https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai\\_aroux\\_sii.APPLI\\_LIAISONS\\_V2](https://play.google.com/store/apps/details?id=appinventor.ai_aroux_sii.APPLI_LIAISONS_V2)

Liaisons ? - Apps on Google Play

Application pour s'entrainer à apprendre ses liaisons cinématiques et statiques

play.google.com

18:51 59%

Quel est le torseur de cette liaison ?

$$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \square \omega_x & \square v_x \\ \square \omega_y & \square v_y \\ \checkmark \omega_z & \checkmark v_z \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

BRAVO !

Liaison suivante

Liaison n° 3 / 10

Retour Menu Principal

18:51 59%

Quel est le torseur de cette liaison ?

$$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \square \omega_x & \checkmark v_x \\ \checkmark \omega_y & \square v_y \\ \square \omega_z & \checkmark v_z \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Non, c'est une liaison PIVOT d'axe Y  
Il fallait cocher Wy

Liaison suivante

Liaison n° 2 / 10

Retour Menu Principal

18:52 59%

Quel est le torseur de cette liaison ?

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \checkmark X_{1 \rightarrow 2} & \square L_{1 \rightarrow 2} \\ \square Y_{1 \rightarrow 2} & \square M_{1 \rightarrow 2} \\ \checkmark Z_{1 \rightarrow 2} & \square N_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_{O,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

BRAVO !

Liaison suivante

Liaison n° 7 / 10

Retour Menu Principal

# Lien entre la cinématique et la statique

Puissance des efforts de liaison = Comoment de torseur

$$P_{i \rightarrow j} = \{T_{i \rightarrow j}\} \otimes \{V_{j/i}\} = \overrightarrow{R_{i \rightarrow j}} \cdot \overrightarrow{V_{M \in j/i}} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \cdot \overrightarrow{M_{M, i \rightarrow j}}$$

$$P_{i \rightarrow j} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{M,R} \otimes \begin{pmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & V_z \end{pmatrix}_{M,R} = X \cdot V_x + Y \cdot V_y + Z \cdot V_z + L \cdot \Omega_x + M \cdot \Omega_y + N \cdot \Omega_z$$

Liaison parfaite  $\rightarrow P_{i \rightarrow j} = 0 \rightarrow I_c + I_s = 6$

# Lien entre la cinématique et la statique

Exemple : Liaison Pivot d'axe  $\vec{x}$  entre les solides 1 et 2 :

$$P_{1 \rightarrow 2} = \{T_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{V_{2/1}\} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{M,R} \otimes \begin{pmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{M,R} = 0$$

$$P_{i \rightarrow j} = X \cdot 0 + Y \cdot 0 + Z \cdot 0 + L \cdot \Omega_x + M \cdot 0 + N \cdot 0 = 0 \text{ donc } L \cdot \Omega_x = 0, \forall \Omega_x \text{ donc } L = 0$$

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{M,R}$$

# Lien entre la cinématique et la statique

Exemple : Liaison Hélicoïdale d'axe  $\vec{x}$  entre les solides 1 et 2 :

$$P_{1 \rightarrow 2} = \{T_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{M,R} \otimes \begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{M,R} = 0$$

Avec  $V_x = \Omega_x \cdot \frac{pas}{2\pi}$

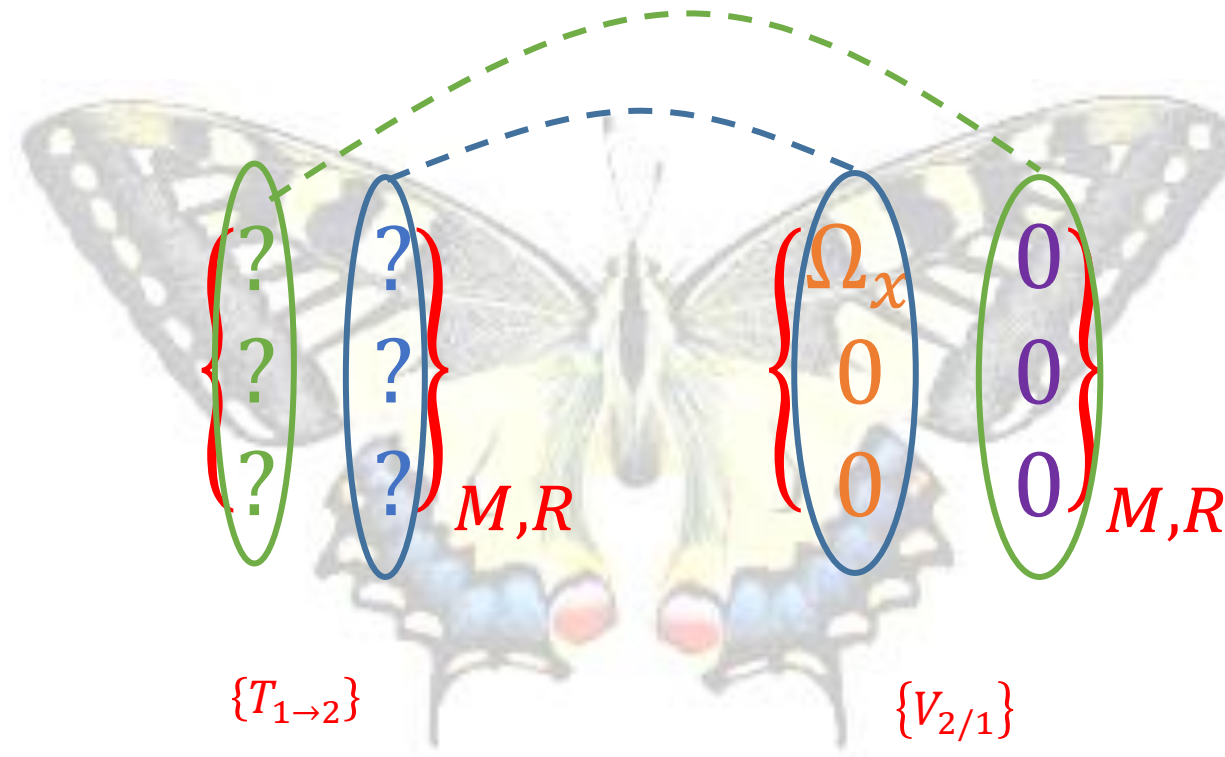
$$P_{i \rightarrow j} = X \cdot V_x + L \cdot \Omega_x = 0 \quad \forall (\Omega_x, V_x) \text{ or } V_x = \Omega_x \cdot \frac{pas}{2\pi} \text{ donc } L = -X \cdot \frac{pas}{2\pi}$$

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{M,R}$$

Avec  $L = -X \cdot \frac{pas}{2\pi}$

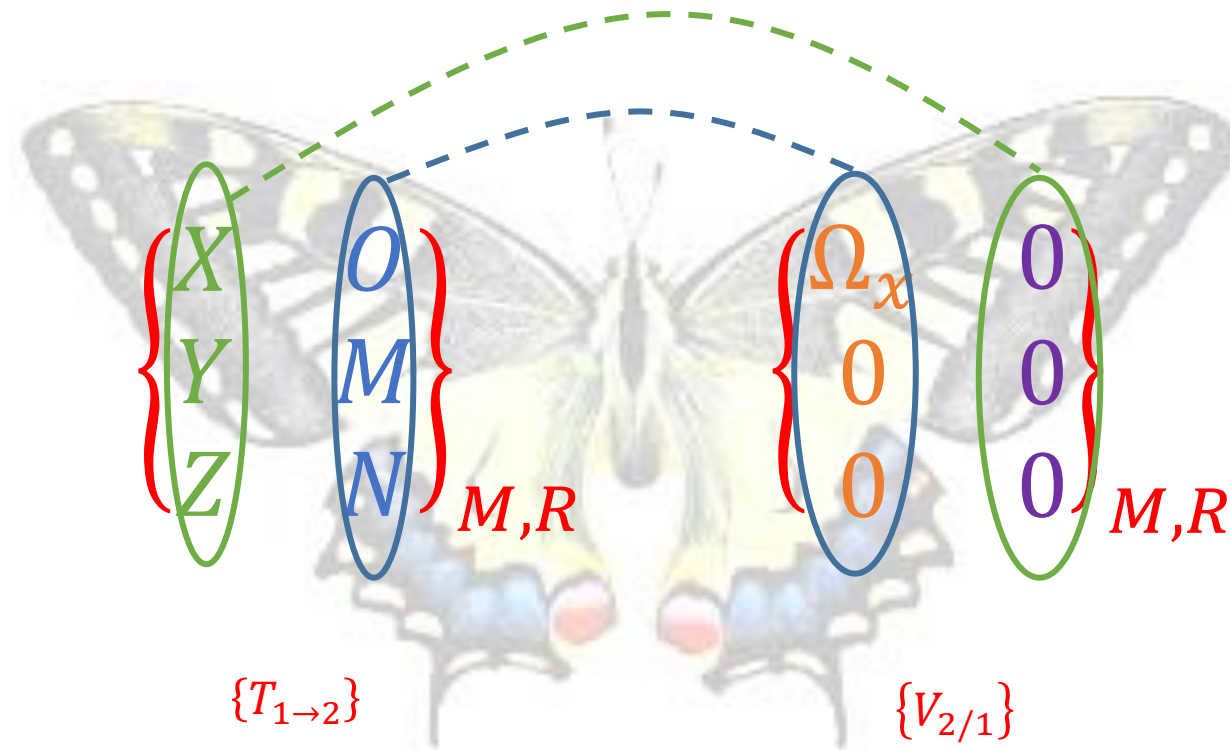
# Lien entre la cinématique et la statique

Exemple : Liaison Pivot d'axe  $\vec{x}$  entre les solides 1 et 2 :



# Lien entre la cinématique et la statique

Exemple : Liaison Pivot d'axe  $\vec{x}$  entre les solides 1 et 2 :





# Liaisons équivalentes

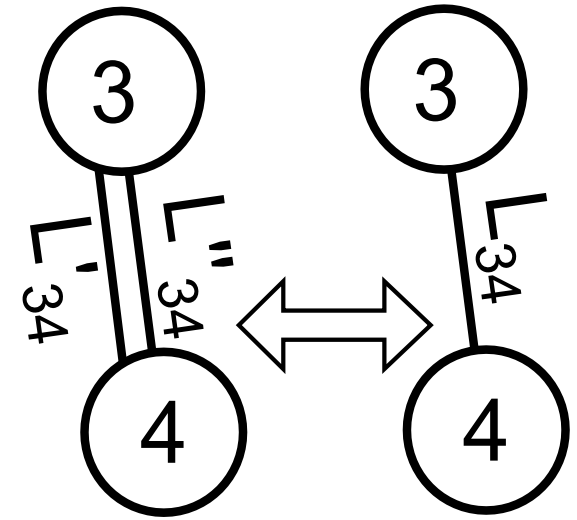
Définition : Liaison équivalente  $\rightarrow$  liaison du tableau normalisé  $\rightarrow$  même comportement (association de liaisons en série ou en parallèle qu'elle remplace)

Liaison équivalente  $\rightarrow$  transmet même action mécanique + autorise le même mouvement

# Liaisons équivalentes

## Liaisons en parallèles

Méthode statique

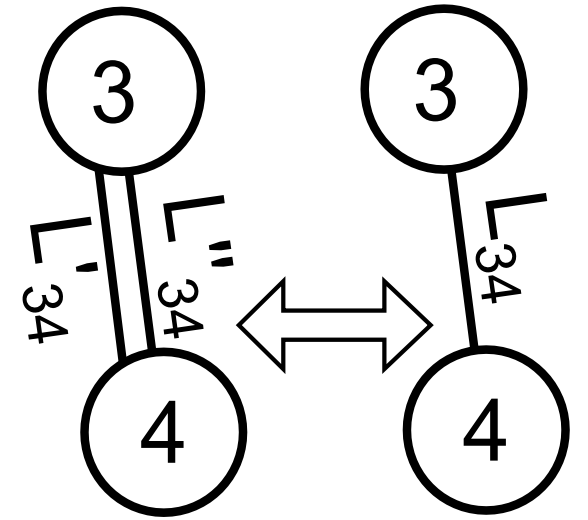


$$\{T_{eq_{L_{34}}}\}_M = \{T_{L'_{34}}\}_M + \{T_{L''_{34}}\}_M + \{T_{L'''_{34}}\}_M + \dots + \{T_{L^n_{34}}\}_M$$

# Liaisons équivalentes

## Liaisons en parallèles

Méthode cinématique



$$\{V_{eq_{L_{34}}}\}_M = \{V_{L'_{34}}\}_M = \{V_{L''_{34}}\}_M = \{V_{L'''_{34}}\}_M = \dots = \{V_{L^n_{34}}\}_M$$

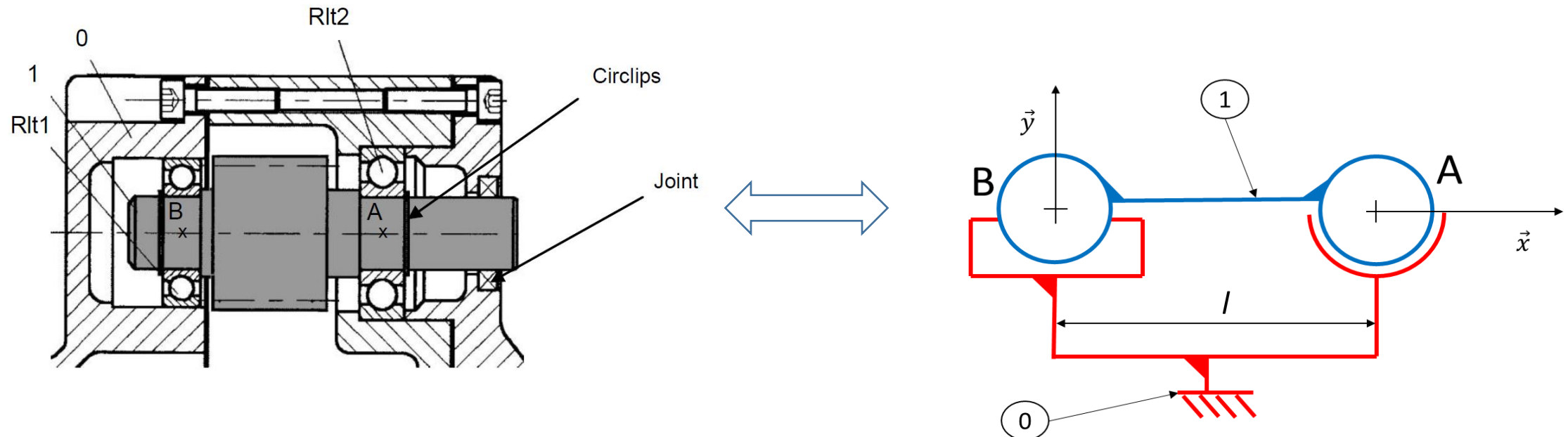
# Liaisons équivalentes

## Liaisons en parallèles

### Méthode cinématique

#### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

#### Schéma cinématique mécanisme :



# Liaisons équivalentes

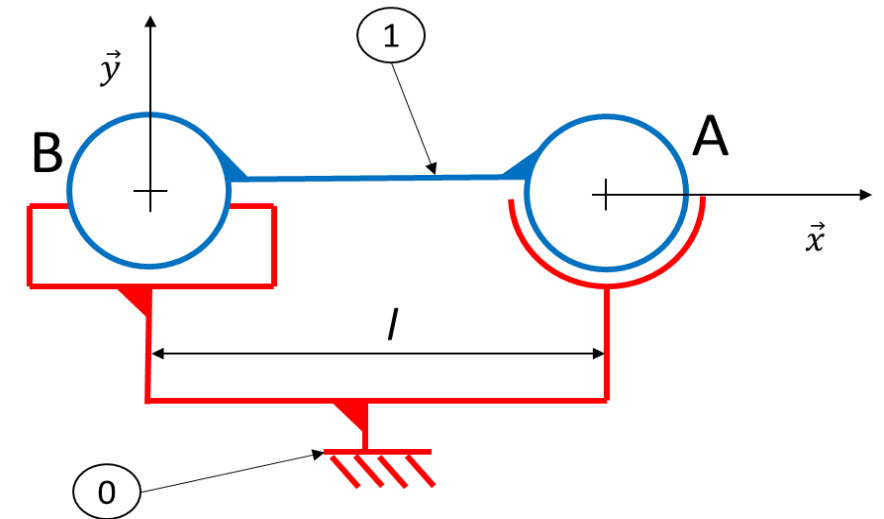
## Liaisons en parallèles

### Méthode cinématique

#### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

$$\text{Liaison sphérique en A : } \{V_{L_A}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x A & 0 \\ \omega_y A & 0 \\ \omega_z A & 0 \end{Bmatrix}_{A,b}$$

$$\text{Liaison sphère-cylindre en B : } \{V_{L_B}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x B & V_{x B} \\ \omega_y B & 0 \\ \omega_z B & 0 \end{Bmatrix}_{B,b}$$



# Liaisons équivalentes

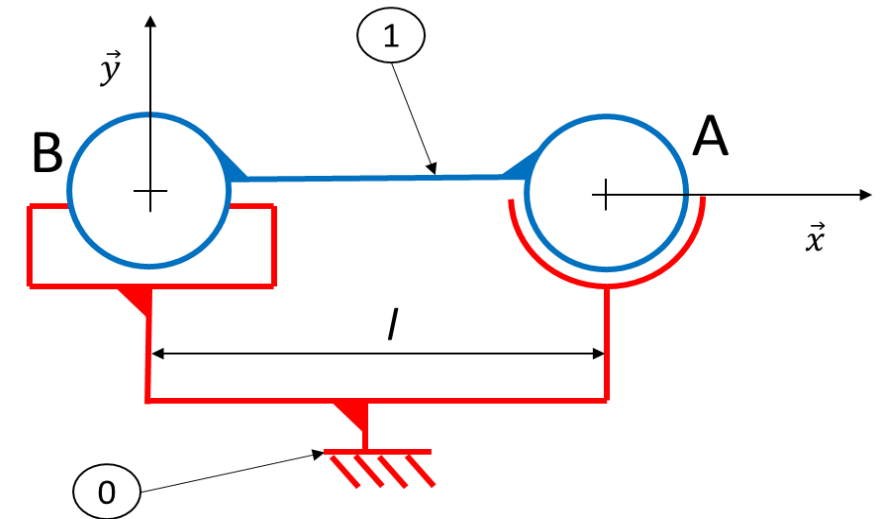
## Liaisons en parallèles

Méthode cinématique

**Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :**

Transfert de la liaison en A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{A \in 3_B / 0}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{B \in 3_B / 0}}}_{V_{xB} \vec{x}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \begin{pmatrix} V_{xB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_b \wedge \begin{pmatrix} \omega_{xB} \\ \omega_{yB} \\ \omega_{zB} \end{pmatrix}_b \\ &= \begin{pmatrix} V_{xB} \\ +l \cdot \omega_{zA} \\ -l \cdot \omega_{yA} \end{pmatrix}_b\end{aligned}$$



# Liaisons équivalentes

## Liaisons en parallèles

### Méthode cinématique

#### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

$$\{V_{L_A}\}_{A,b} = \{V_{L_B}\}_{A,b} = \{V_{Leq}\}_{A,b}$$

$$\omega_{x A} = \omega_{x B} = \omega_{x eq} ;$$

$$\omega_{z A} = \omega_{z B} = \omega_{z eq} ;$$

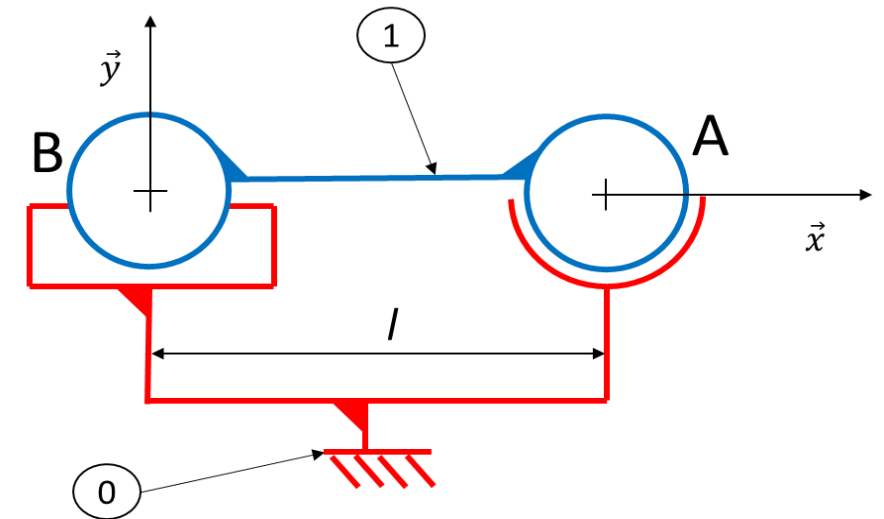
$$+l \cdot \omega_{z B} = 0 ;$$

$$\omega_{y A} = \omega_{y B} = \omega_{y eq} ;$$

$$0 = V_{x B} = V_{x eq} ;$$

$$-l \cdot \omega_{y B} = 0$$

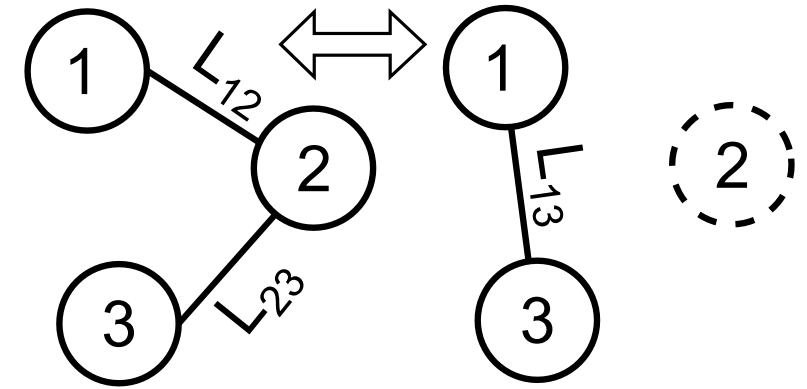
$$\{V_{Leq}\}_{A,b} = \begin{Bmatrix} \omega_{x eq} = \omega_{x A} = \omega_{x B} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,b}$$



# Liaisons équivalentes

## Liaisons en séries

Méthode statique



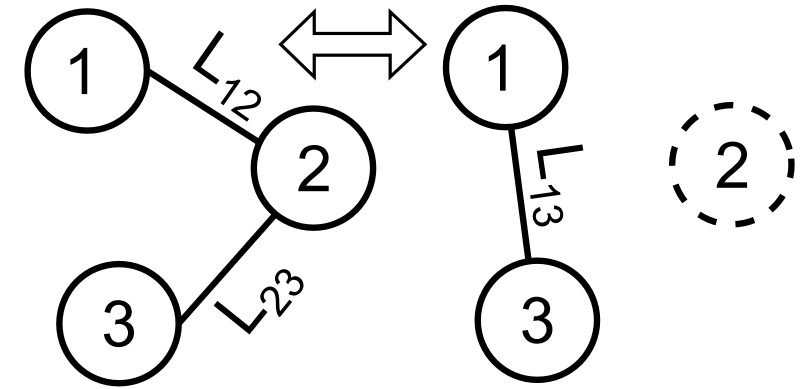
$$\{T_{eq_{L_{13}}}\}_M = \{T_{L_{12}}\}_M = \{T_{L_{23}}\}_M = \dots = \{T_{L_{p3}}\}_M = \{T_{L_{23}}\}_M$$



# Liaisons équivalentes

## Liaisons en séries

Méthode cinématique



$$\{V_{eq_{L_{13}}}\}_M = \{V_{L_{12}}\}_M + \{V_{L_{23}}\}_M + \dots + \{V_{L_{P3}}\}_M \{V_{L_{23}}\}_M$$

# Liaisons équivalentes

## Liaisons en séries

### Méthode cinématique

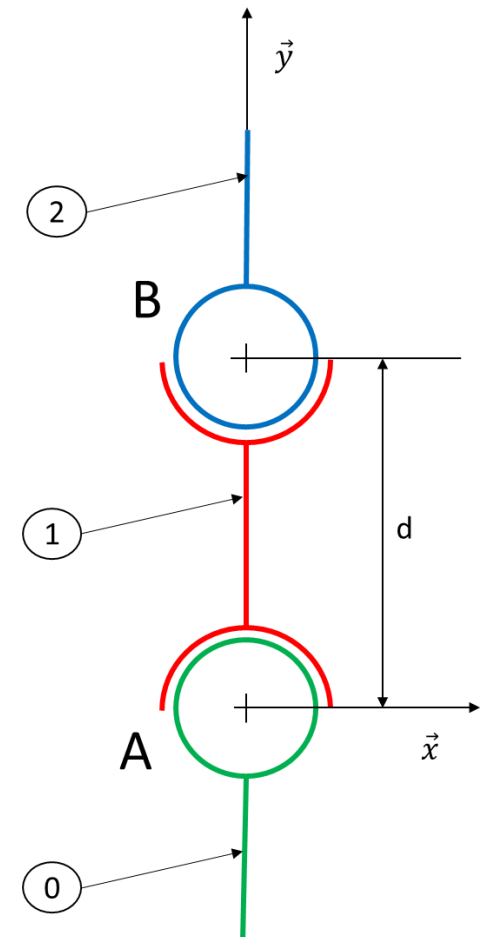
#### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en série :

Torseur cinématique de la liaison sphérique  $L_{2/1}$ :

$$\{V_{L_{2/1}}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \text{ 2/1} & 0 \\ \omega_y \text{ 2/1} & 0 \\ \omega_z \text{ 2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{B,b}$$

Torseur cinématique de la liaison sphérique  $L_{1/0}$  :

$$\{V_{L_{1/0}}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \text{ 1/0} & 0 \\ \omega_y \text{ 1/0} & 0 \\ \omega_z \text{ 1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{A,b}$$



# Liaisons équivalentes

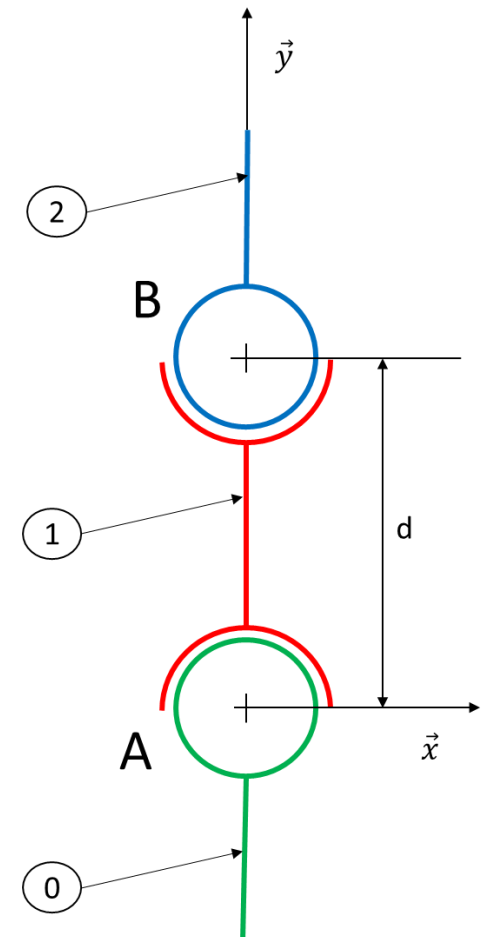
## Liaisons en séries

### Méthode cinématique

#### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en série :

Transfert de la liaison  $L_{2/1}$  en A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{B \in 2/1}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}_b \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x \ 2/1} \\ \omega_{y \ 2/1} \\ \omega_{z \ 2/1} \end{pmatrix}_b \\ &= \begin{pmatrix} +d \cdot \omega_{z \ 2/1} \\ 0 \\ -d \cdot \omega_{x \ 2/1} \end{pmatrix}_b\end{aligned}$$



# Liaisons équivalentes

## Liaisons en séries

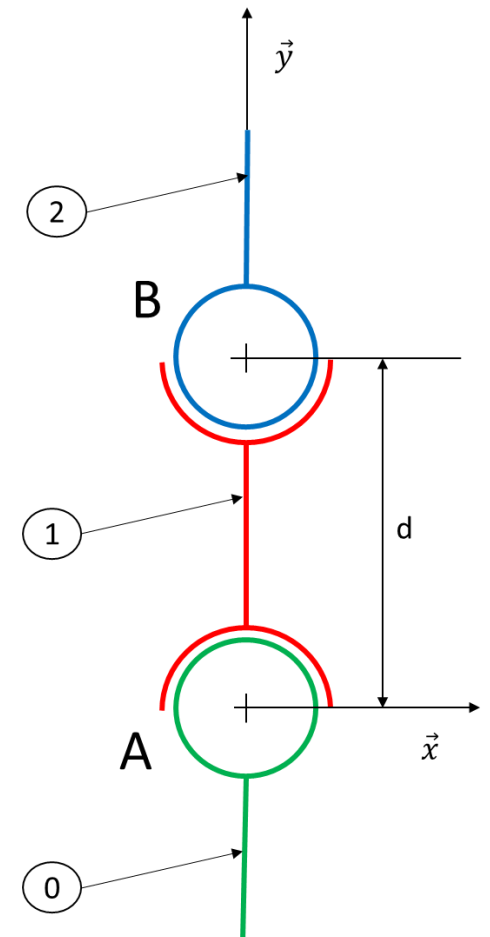
### Méthode cinématique

**Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en série :**

$$\{V_{Leq}\}_{A,b} = \{V_{L_{2/1}}\}_{A,b} + \{V_{L_{1/0}}\}_{A,b}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \omega_{x eq} = \omega_{x 2/1} + \omega_{x 1/0} \\ \omega_{y eq} = \omega_{y 2/1} + \omega_{y 1/0} \\ \omega_{z eq} = \omega_{z 2/1} + \omega_{z 1/0} \\ V_{x eq} = +d \cdot \omega_{z 2/1} \\ V_{y eq} = 0 \\ V_{z eq} = -d \cdot \omega_{x 2/1} \end{cases}$$

La seule composante nulle est  $V_{y eq}$ , la liaison équivalente est donc une liaison sphère-plan de normale  $(A, \vec{y})$ .



# Liaisons équivalentes

## Conclusions

Réduction des liaisons parallèles → Localiser très facilement certaines sources d'hyperstatisme

Réduction des liaisons séries → schéma cinématique minimum + étude simplifiée des lois E/S  
+ étude des équations de mouvement

# Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

## Mobilités d'un mécanisme

Mathématiquement :

- Maximum,  $6 * \gamma$  équations cinématiques
- Rang  $r_c$  = nombre d'équations indépendantes
- Mobilité du mécanisme  $m$  :

$$m = I_c - r_c$$

# Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

## Mobilités d'un mécanisme

Mécaniquement : La mobilité d'un mécanisme est le nombre de paramètres cinématiques indépendants qu'il faut définir pour connaître les mouvements de toutes les pièces du mécanisme

$$m = m_u + m_i$$

Avec :  $m_u$  : **mobilité utile** et  $m_i$  : **mobilité interne**

Remarque :  $m$  est la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques de liaison  $I_c$  et le nombre d'équations cinématiques indépendantes (dites utiles)

# Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

## Mobilité utile

$m_u$  : **mobilité utile**, correspond au nombre de paramètres cinématiques indépendants qu'il faut définir pour connaître les mouvements des pièces d'entrée et de sortie d'un mécanisme

$m_u$  correspond au nombre de lois E/S

Il y a généralement autant d'actionneurs (exemple : moteurs, vérins) que de mobilités utiles dans un mécanisme



# Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

## Mobilité interne

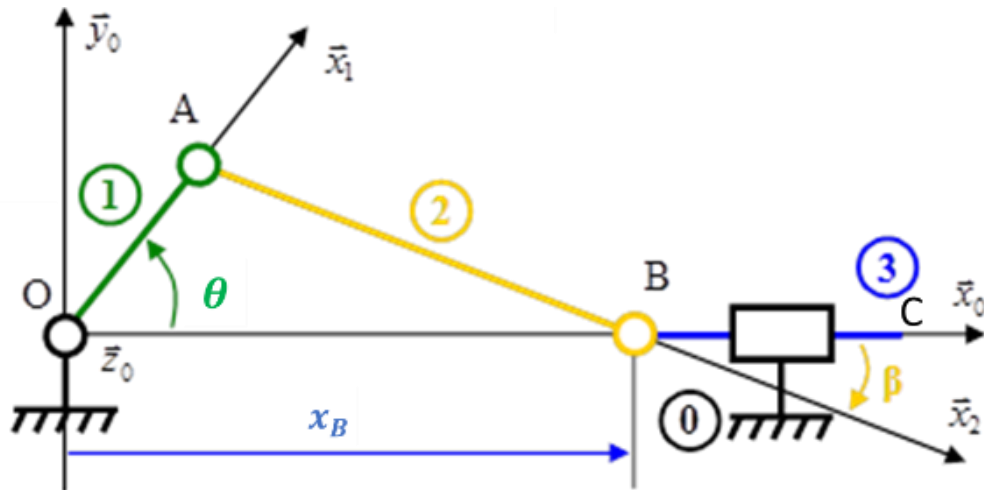
$m_i$  : **mobilité interne** est le nombre de paramètres cinématiques indépendants (donc d'équations indépendantes) qu'il faut définir pour connaître les mouvements des pièces internes d'un mécanisme (pièces qui ne jouent aucun rôle dans la transmission du mouvement de l'entrée vers la sortie).

$m_i$  correspond au nombre de mouvements indépendants ne faisant intervenir aucun des paramètres d'entrée-sortie.

# Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

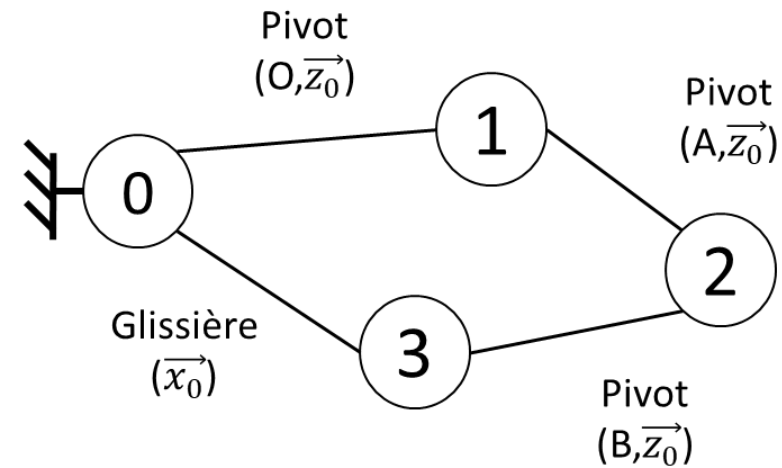
## Exemples

### Système Bielle – Manivelle – Piston



$$l = 4 \text{ et } p = 4$$

$$I_c = \underbrace{1 + 1 + 1}_{3 \text{ pivots}} + \underbrace{1}_{1 \text{ glissière}} = 4$$

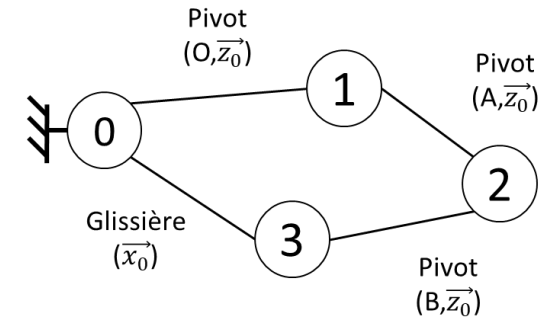
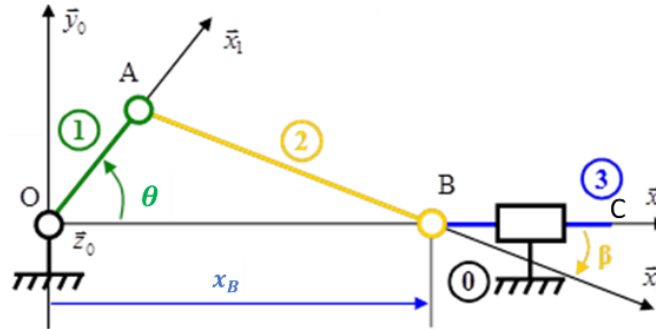


$$\gamma = l - p + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$$

# Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

## Exemples

### Système Bielle – Manivelle – Piston



La fermeture cinématique s'écrit :  $\{V_{0/3}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\} = \{0\}$

$$\text{Soit : } \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 0/3}} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 0/3}} = -\overrightarrow{V_{B \in 3/0}} = -\dot{x}_B \cdot \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 3/2}} = \overrightarrow{V_{B \in 3/2}} + \vec{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 = L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = L_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$$

# Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

## Exemples

Système Bielle – Manivelle – Piston

Système de 6 équations à 4 inconnues ( $I_c = 4$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} = 0 \\ -L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha - L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta - \dot{x} = 0 \\ L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha + L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

3 équations indépendantes donc  $r_c = 3$ .

# Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

## Exemples

Système Bielle – Manivelle – Piston

$$m = I_c - r_c = 4 - 3 = 1$$

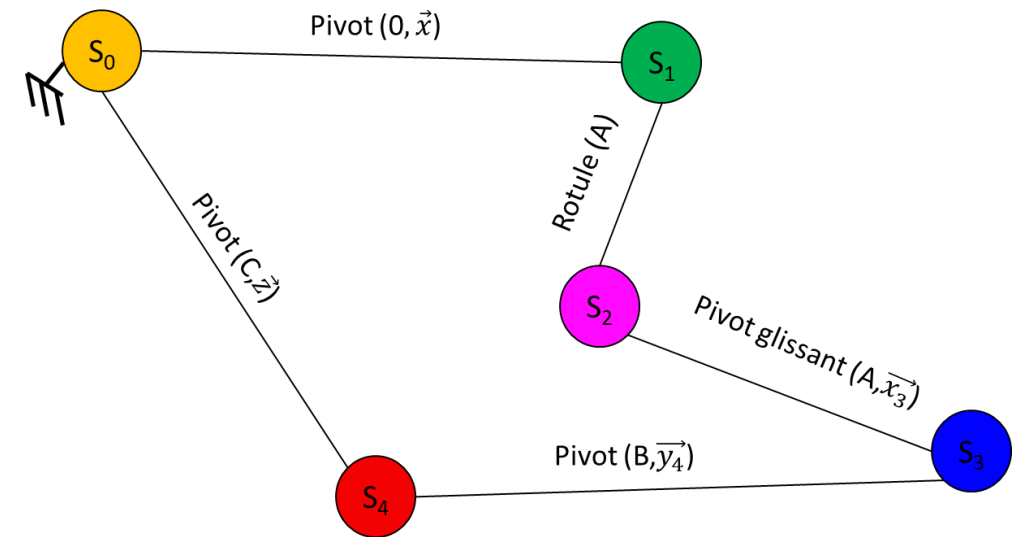
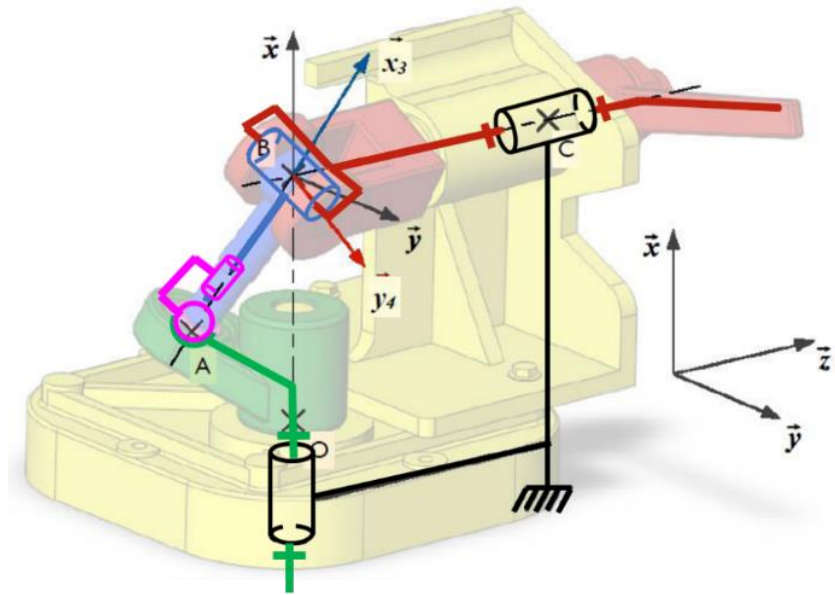
Une seule mobilité utile (entrée : rotation  $\theta$ , sortie : translation  $x$ ) et pas de mobilité interne

$$m = 1 = \underbrace{1}_{m_u} + \underbrace{0}_{m_i}$$

# Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

## Exemples

### Barrière sinusmatique



$$m = 2 = \underbrace{1}_{m_u} + \underbrace{1}_{m_i}$$

# Hyperstatisme

## Hyperstaticité

Définition : L'hyperstaticité ou le degré d'hyperstatisme  $h$  d'un modèle est un nombre entier correspondant au nombre de conditions géométriques à imposer pour que le système puisse se monter et fonctionner

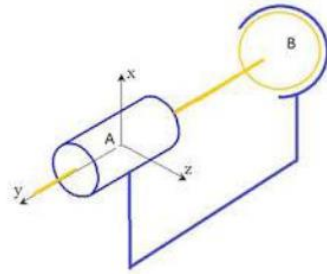
Si  $h > 0 \rightarrow$  impossible de déterminer l'ensemble des inconnues statiques

Si  $h = 0$  (isostatique)  $\rightarrow$  On peut déterminer les inconnues statiques

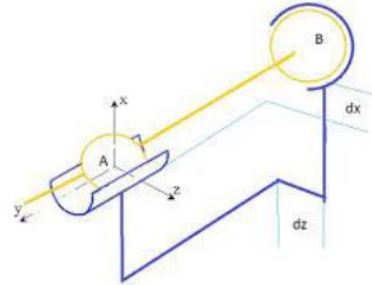
# Hyperstatisme

## Hyperstaticité

Isostatisme = fonctionnement du mécanisme sans contrainte excessive



*Liaison pivot dite hyperstatique*



*Liaison pivot dite isostatique*

Solution technique isostatique (sans contrainte géométrique) → souvent recherchée → conditions de montage simples + défauts d'usinages compromettant

Solution technique hyperstatique → plus rigide + plus robuste (nombre de contact surabondants)

Remarque : Une chaîne simple ouverte ne peut pas être hyperstatique



# Hyperstatisme

## Approche cinématique

La loi de composition de mouvement (fermeture cinématique « Indiana Jones ») appliquée à chacune des  $\gamma$  chaines indépendantes

# Hyperstatisme

## Approche cinématique

Nombre d'équations cinématiques

$$E_c = 6. \gamma$$

# Hyperstatisme

## Approche cinématique

Nombre d'inconnues cinématiques

$I_c$  = nombre d'inconnues cinématiques =  $\sum$  ddl de chacune des  $l$  liaisons

$$\begin{matrix} & \overbrace{\hspace{10em}}^{I_c \text{ colonnes}} \\ \begin{matrix} E_c \text{ équations} \\ \end{matrix} & \left( \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right) & \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} I_c & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

# Hyperstatisme

## Approche cinématique

Degré d'hyperstatisme

$$h = E_c - r_c$$

Mathématiquement :  $h$  = nombre d'équations ne servant pas à la résolution

(eq 0 = 0)

Mécaniquement :  $h$  = nombre de ddl à ajouter pour garantir un montage et un fonctionnement sans contrainte du mécanisme

$$\left. \begin{array}{l} m = I_c - r_c \\ h = E_c - r_c \end{array} \right\} h = m - I_c + E_c$$

$$\left( \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1cm}}^{I_c} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_h \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1cm}}^{r_c} \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_m \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} I_c \\ \\ \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right)$$

# Hyperstatisme

## Approche statique

Nombre d'équations statiques

Une étude statique (idem dynamique) systématique est menée en étudiant l'équilibre de chacune des pièces du mécanisme

$$E_s = 6 \cdot (p - 1)$$

Remarque : Le « -1 » correspond au bâti que l'on ne peut pas l'isoler !



# Hyperstatisme

## Approche statique

Nombre d'inconnues statiques

*Inconnues =  $X, Y, Z, L, M, N$  dans les torseurs de liaisons*

$$\begin{array}{c} \overbrace{\left( \begin{array}{c} \text{\textit{I}_s \text{ colonnes}} \\ \text{\textit{E}_s \text{ équations}} \end{array} \right)}^{\text{\textit{I}_s \text{ colonnes}}} \\ \left( \begin{array}{c} \text{\textit{I}_s} \end{array} \right) \end{array} = \left( \begin{array}{c} \text{(1) Composantes} \\ \text{d'actions mécaniques} \\ \text{extérieures autres} \\ \text{que les } \text{\textit{I}_s} \\ \text{(2) Composantes} \\ \text{dynamiques} \end{array} \right)$$

(1) : Poids - Couple ou effort, moteur ou résistant - actions mécaniques externes ou internes dues à des éléments déformables ...

(2) : cf. cours de dynamique, égales à 0 en statique.

Remarque : On constate l'égalité suivante :  $I_c - E_c = E_s - I_s$

# Hyperstatisme

## Approche statique

Degré d'hyperstatisme

rang,  $r_s$  = nombre d'équations statique indépendantes

$$E_s \left( \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{I_s} \\ \boxed{\hspace{1.5cm}}^{r_s} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \hspace{1.5cm} \\ I_s \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \hspace{1.5cm} \end{array} \right)$$

$$h = I_s - r_s$$

Mécaniquement :  $h$  = nombre d'inconnues ne pouvant pas être déterminées

à l'aide de la statique ou de la dynamique

# Hyperstatisme

## Approche statique

### Mobilités

$$m = E_s - r_s$$

$m$  = nombre d'équations ne servant pas à la résolution (eq  $0 = 0$  pour l'équation homogène associée)

$$\left. \begin{array}{l} m = E_s - r_s \\ h = I_s - r_s \end{array} \right\} \quad h = m - E_s + I_s$$

Remarque : approche cinématique  $\leftrightarrow$  approche statique

$$\text{car } I_c - E_c = E_s - I_s$$

Remarque : Equations « inutiles » (eq combinaisons linéaires des autres ou eq  $0 = 0$ )  $\rightarrow$  mobilités dans le mécanisme

$$\begin{array}{c} E_s \\ h \end{array} \left( \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{c} r_s \\ \boxed{\phantom{000000}} \end{array}}^{I_s} \quad \underbrace{\phantom{000000}}_m \end{array} \right) \begin{array}{c} I_s \\ \phantom{000000} \end{array} = \begin{array}{c} \phantom{000000} \\ \phantom{000000} \end{array}$$



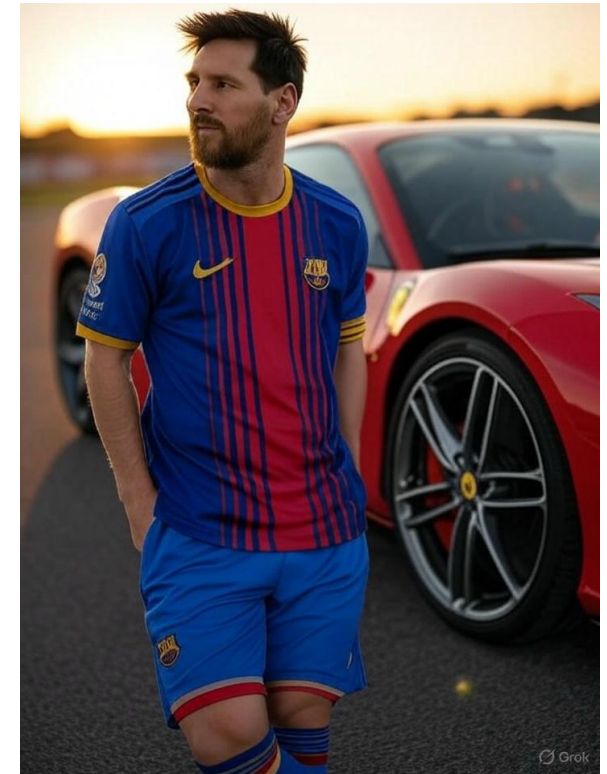
# Hyperstatisme

## Approche globale – Relation entre mobilité et hyperstatisme



Approche cinématique :  $h = m - I_c + E_c$

Approche statique :  $h = m - E_s + I_s$



Remarque importante : Indice de mobilité  $I = I_c - E_c = E_s - I_s$  ou encore  $I = m - h$  donc  $h = m - I$

# Hyperstatisme

## Problème plan

Approche cinématique :  $\mathbf{h} = \mathbf{m} + 3.\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{I}_c$

Approche statique :  $\mathbf{h} = \mathbf{m} + \mathbf{I}_s - 3.(p - 1)$

# Définition physique de l'hyperstatisme

## Pourquoi concevoir hyperstatique ?

Concevoir un système volontairement hyperstatique → efforts mis en jeux sont importants ou systèmes qu'on souhaite très rigides

Si mécanisme est hyperstatique → 2 solutions :

- Composer avec cet hyperstatisme → garantir le bon fonctionnement du mécanisme
- Rendre le modèle du mécanisme isostatique → modification de sa structure (choix de liaisons différentes...)

Conception hyperstatique → augmente la rigidité + augmente la stabilité de l'assemblage + limite les déformations.

# Définition physique de l'hyperstatisme

## Pourquoi concevoir hyperstatique ?

	Avantage	Inconvénient
Mécanisme isostatique $h=0$	Economique Facilement montable	Souple
Mécanisme hyperstatique $h > 0$	Rigide (opposé à la montabilité)	Couteux Contraintes géométriques fines

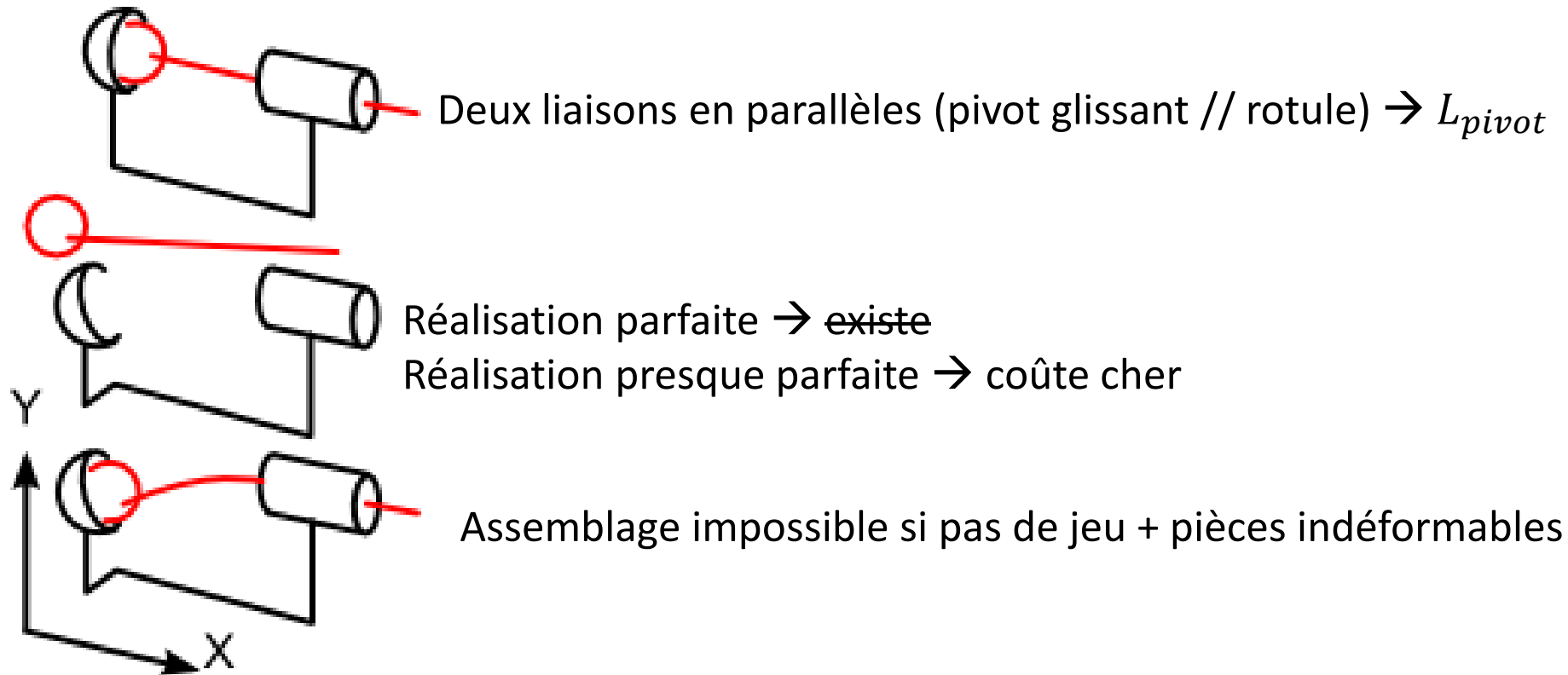
Rendre le modèle du mécanisme isostatique → Annuler les inconnues hyperstatiques  
(cf. approche statique)

→ Ajouter un ou plusieurs ddl sans ajouter de mobilités → Modification des liaisons et/ou ajout de liaisons et pièces intermédiaires

# Définition physique de l'hyperstatisme

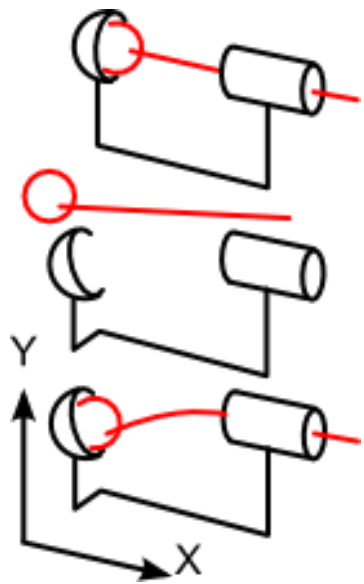
## Hypothèse des liaisons parfaites

Les liaisons parfaites  $\Leftrightarrow$  Géométrie parfaite ET sans frottement ET sans jeu



# Définition physique de l'hyperstatisme

## Hypothèse des liaisons parfaites

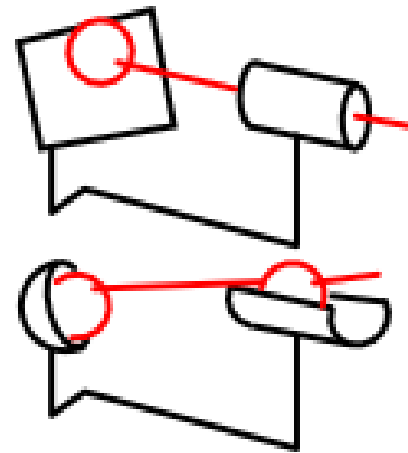


Degré d'hyperstatisme = Nombre d'efforts et de couples nécessaires pour déformer le mécanisme et le contraindre à respecter la géométrie définie

2 efforts selon y et z OU 2 couples autour de y et z

→ Déformer l'arbre + Contraindre la sphère de la rotule dans son logement

→ degré d'hyperstatisme = 2



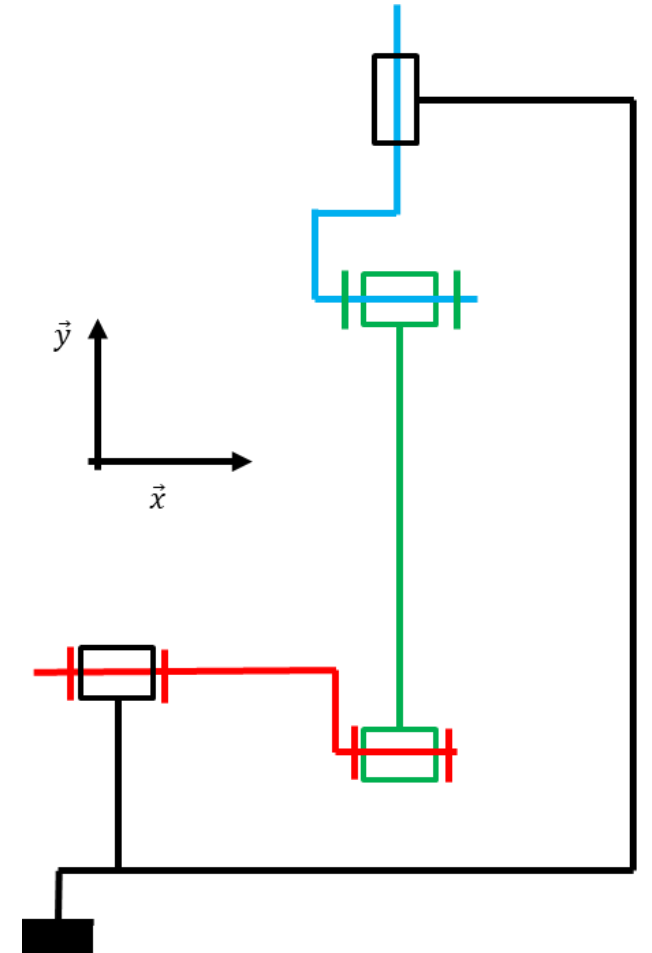
Degré d'hyperstatisme = Nombre de degrés de liaison que l'on doit supprimer (ou au nombre de ddl qu'il faut ajouter)  
→ Assemblage sans contrainte

# Définition physique de l'hyperstatisme

## Exemple sur le piston-bielle-manivelle

$$h = (1 + 0) - 5 + 6 * 1 = 2.$$

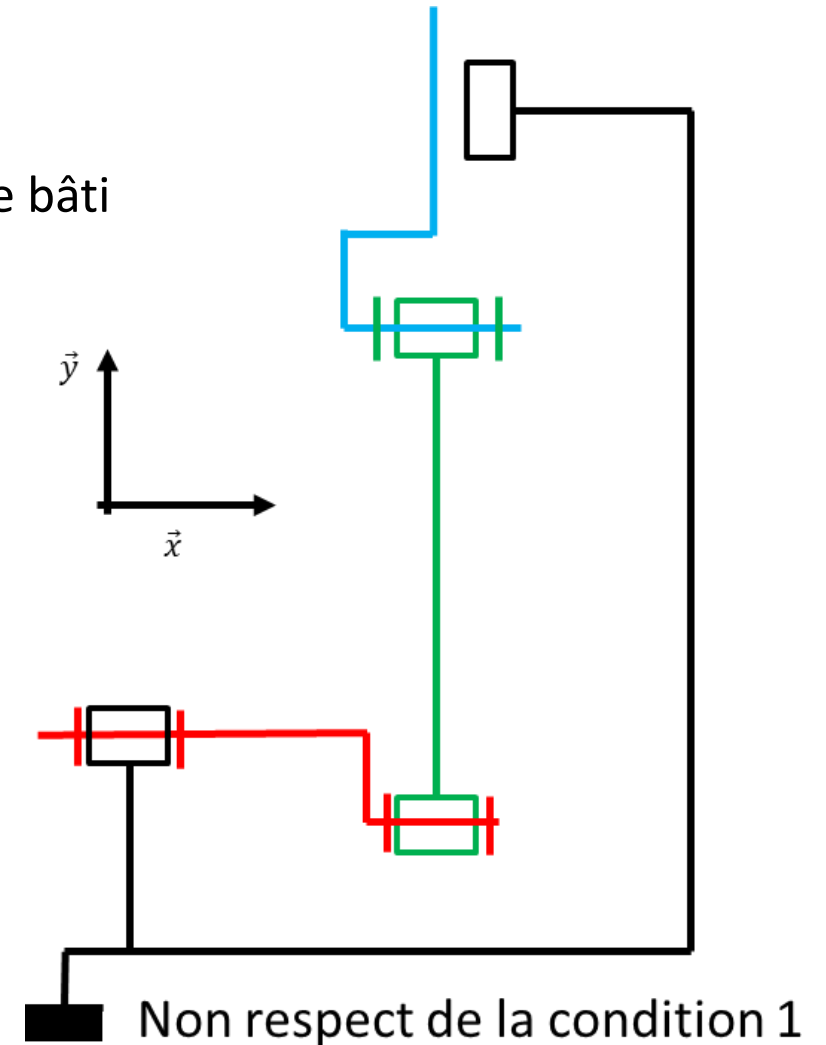
Degré d'hyperstatisme → Contrainte géométrique de fonctionnement  
→ Parallélisme des liaisons d'axe  $\vec{x}$



# Définition physique de l'hyperstatisme

## Exemple sur le piston-bielle-manivelle

Condition 1 : Alignement dans la liaison pivot glissant entre le piston et le bâti

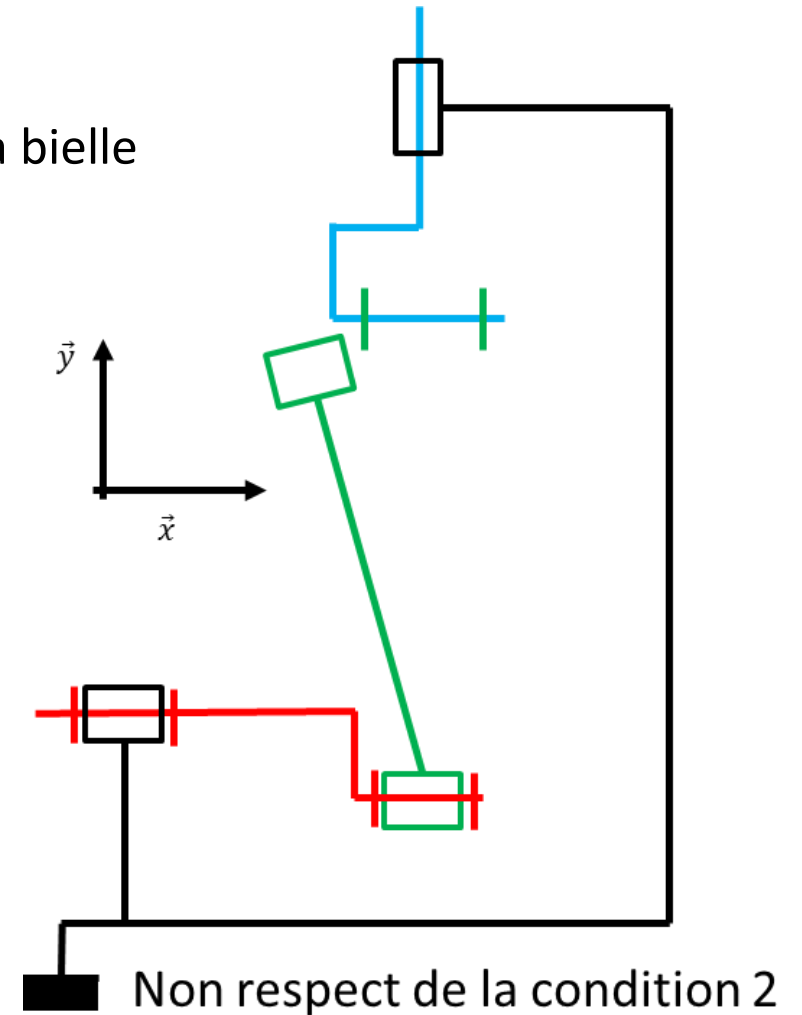




# Définition physique de l'hyperstatisme

## Exemple sur le piston-bielle-manivelle

Condition 2 : Parallélisme des deux liaisons pivot à chaque extrémité de la bielle





# Définition physique de l'hyperstatisme

## La conception hyperstatique

Concevoir hyperstatique impose des précautions :

- Cotation très précise → augmentation des coûts
- Présence d'éléments de réglage (cales, pièce mobile au moment de l'assemblage ...) → augmentation de la complexité et des coûts
- Présence de jeux plus importants que nécessaire au fonctionnement dans une ou toutes les liaisons → faciliter l'assemblage → diminution de la précision du guidage
- Présence d'éléments déformables ou exploitation de l'élasticité des pièces

# Définition physique de l'hyperstatisme

## La conception hyperstatique

Connaître le degré d'hyperstatisme et ses sources permet :

- De déterminer les tolérances à imposer aux dimensions et les conditions géométriques à respecter (coaxialité, parallélisme, etc ...)
- De savoir où imposer des jeux et/ou prévoir des réglages
- De prévoir quels éléments doivent être déformables
- De choisir un ordre d'assemblage

# Définition physique de l'hyperstatisme

## Remarques générales

**Le degré d'hyperstatisme ne dépend pas :**

- Frottement (composantes  $\rightarrow$  ~~inconnues statiques~~)
- Actions extérieures et poids, masses et inerties

Méthode cinématique  $\rightarrow$  chaîne simple fermée  $\rightarrow$  6 eq en cinématique vs  $6 * (p - 1)$  eq en statique

Méthode statique  $\rightarrow$  chaînes complexes (~~calcul nombre cyclomatique~~ ou ~~réduire les liaisons parallèles~~)

# Méthode globale de résolution

## Ce qu'il faut retenir

Point de vue	Cinématique	Statique
Inconnues	$I_c = \sum_{i=1}^{i=l} i_{c_i}$	$I_s = \sum_{i=1}^{i=l} i_{s_i}$
Equations	$E_c = 6.\gamma$	$E_s = 6.(p - 1)$
Equations indépendantes ou rang du système	$r_c \leq 6.\gamma$	$r_s \leq 6.(p - 1)$
Mobilité	$m = I_c - r_c$	$m = E_s - r_s$
Degré d'hyperstatisme	$h = 6.\gamma - r_c$	$h = I_s - r_s$
h par intuition	$h = m - I_c + 6.\gamma$	$h = m - 6.(p - 1) + I_s$



# Méthode globale de résolution

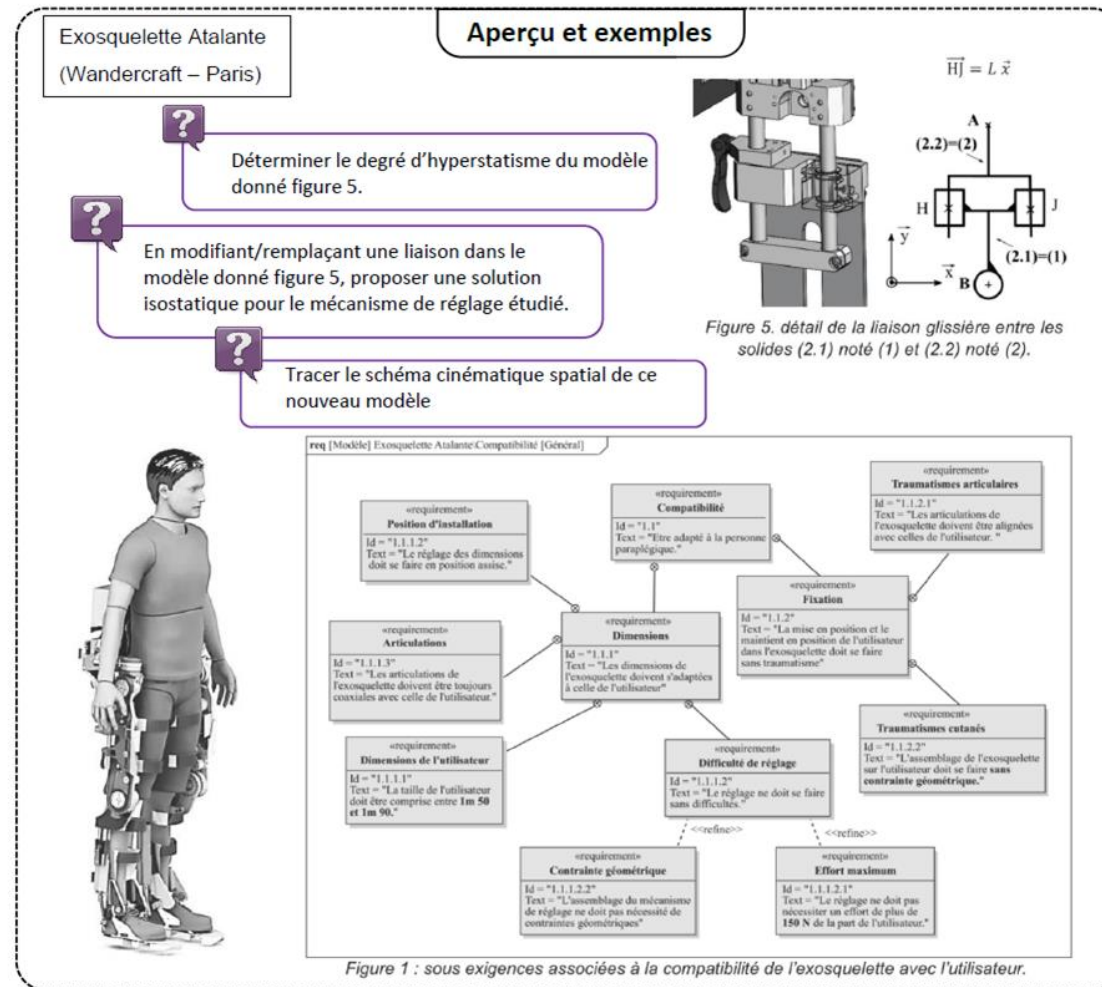
## Méthode de résolution

### Quelle méthode choisir ?

- ⇒ Recherche du degré de mobilité et du degré d'hyperstatisme
- approche cinématique → plus simple (grandeurs visibles + nombre d'équations)
  
- ⇒ Recherche de l'isostatisme ou des conditions géométrique et dimensionnelle associées à l'hyperstatisme
- approche statique

# Méthode globale de résolution

## Exemple de ce qui peut être demandé en concours





# Méthode globale de résolution

Exemple de ce qui peut être demandé en concours

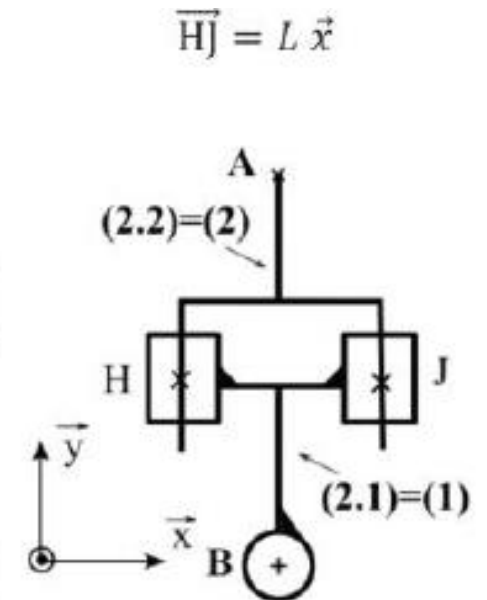
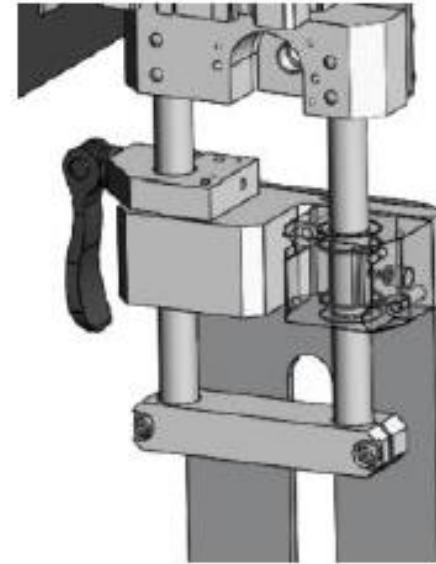
**Quel est le degré d'hyperstatisme ?**

Par l'approche intuitive, la mobilité utile est de 1 (réglage en translation) et il n'y a pas de mobilité interne

$$h = m + I_s - 6 \cdot (p - 1) = 1 + 8 - 6 \cdot (2 - 1) = 3$$

ou

$$h = m - I_c + 6 \cdot \gamma = 1 - 4 + 6 \cdot 1 = 3$$



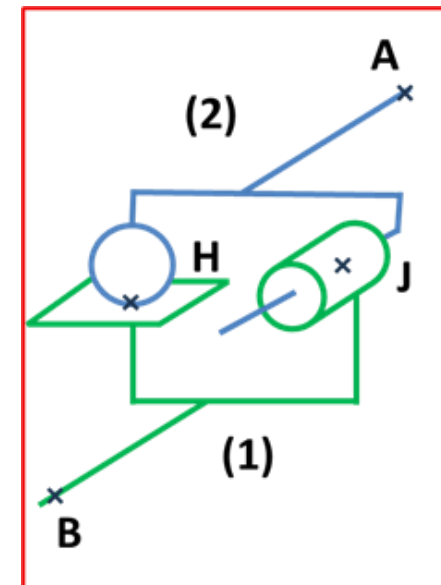
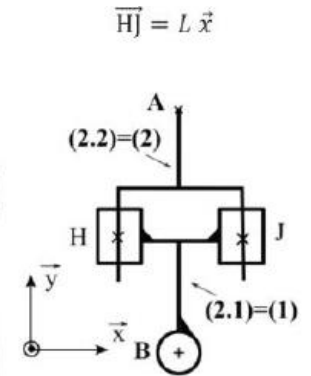
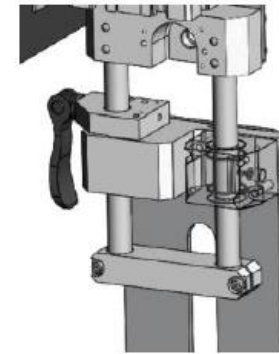
# Méthode globale de résolution

## Exemple de ce qui peut être demandé en concours

En modifiant/remplaçant une liaison dans le modèle donné au-dessus, proposer une solution isostatique pour le mécanisme de réglage étudié

Il faut remplacer une liaison pivot glissant par une liaison ponctuelle de normale  $\vec{z}$  (en H ou en J).

Tracer le schéma cinématique spatial de ce nouveau modèle



# Méthode globale de résolution

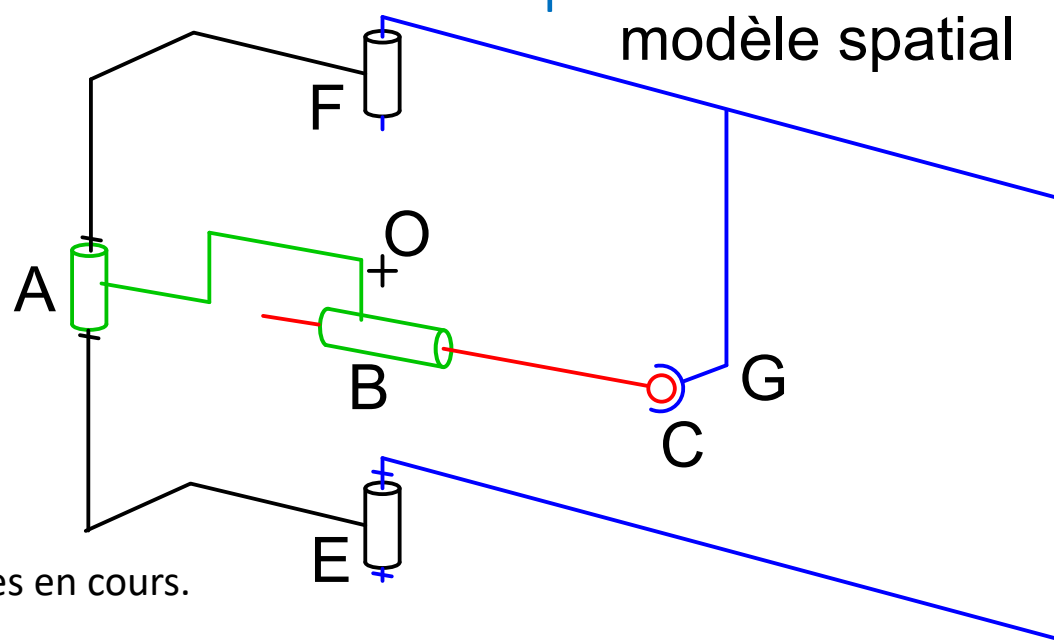
## Stratégie au concours

- Choix d'une ou autre méthode dépend fortement de ce que l'on cherche, du temps imparti pour trouver le résultat, et de ce qu'on vous impose dans le sujet
- Les approches analytiques sont probablement plus sûres quant à la détermination de  $m$  et  $h$   
L'approche analytique cinématique est souvent plus courte que l'approche analytique statique
- Si dans le sujet, on vous demande de dimensionner les liaisons, l'approche statique est obligatoire. Dans ce cas, comme toutes les équations sont déjà écrites, il ne reste plus qu'à analyser le système d'équations pour déterminer l'hyperstatisme et les mobilités

## Exercice : Détermination du degré d'hyperstatisme d'un portail automatique



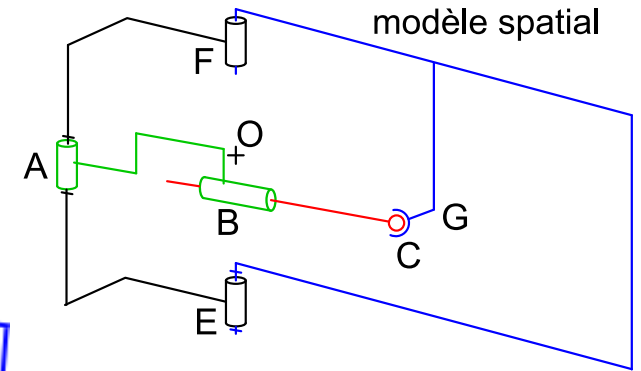
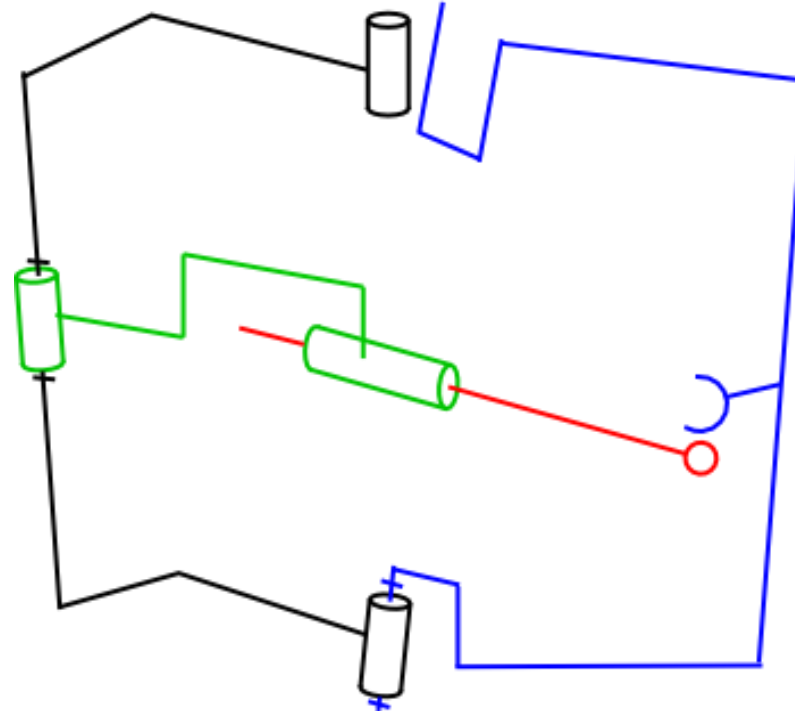
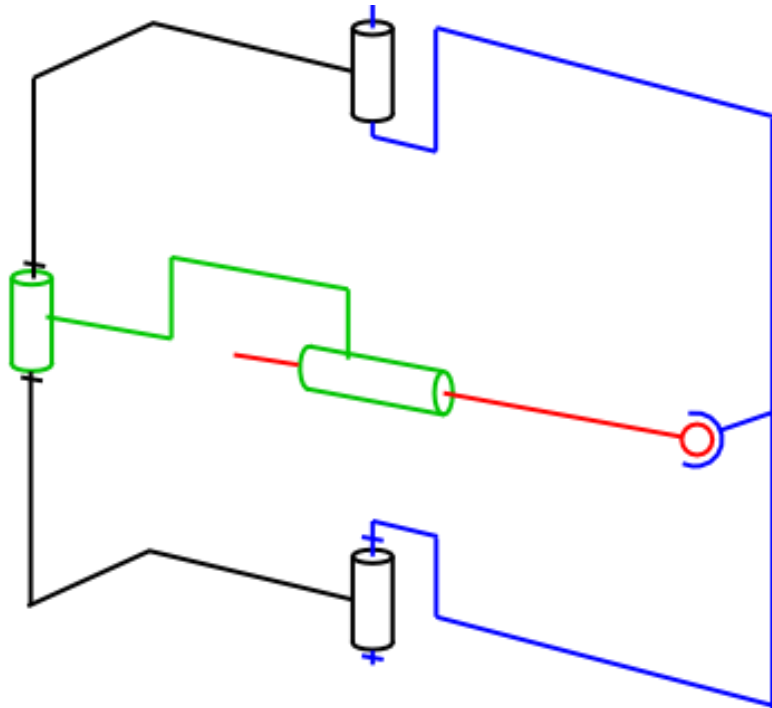
**Q7 :** Modifier le schéma cinématique pour rendre le modèle isostatique.



# Méthode globale de résolution

## Exercice : Détermination du degré d'hyperstatisme d'un portail automatique

Contraintes géométriques d'alignement lors de l'assemblage



# Méthode globale de résolution

Exercice : Détermination du degré d'hyperstatisme d'un portail automatique

Solutions pour obtenir un modèle isostatique

