Théorie des mécanismes

Compétences attendues :

- ✓ Modifier un modèle pour le rendre isostatique.
- ✓ Mobilité du modèle d'un mécanisme.
- ✓ Hyperstatisme du modèle.
- ✓ Substitution de liaisons.

1. Modélisation des systèmes de solides

La théorie des mécanismes est un domaine d'étude de la mécanique (cinématique et statique) permettant d'étudier les mécanismes et structures dans le but de les concevoir ou de les améliorer.

Cette théorie s'appuie sur les outils de la mécanique (graphe des liaisons, schéma cinématique, fermeture cinématique, PFS, …) afin de caractériser la rigidité d'une structure et de savoir si l'ensemble des inconnues des liaisons sont déterminables.

Nous allons en particulier déterminer le degré de mobilité et l'hyperstatisme d'un modèle afin de le rendre isostatique en modifiant des liaisons si besoin.

1.1. Hypothèses

- Les pièces sont indéformables.
- Les liaisons mécaniques entre les solides sont considérées comme parfaites (sans jeu et sans frottement). Les contacts sont maintenus.
- Les effets dynamiques sur l'ensemble des pièces sont négligés, de telle sorte que le principe fondamental de la statique puisse s'appliquer.

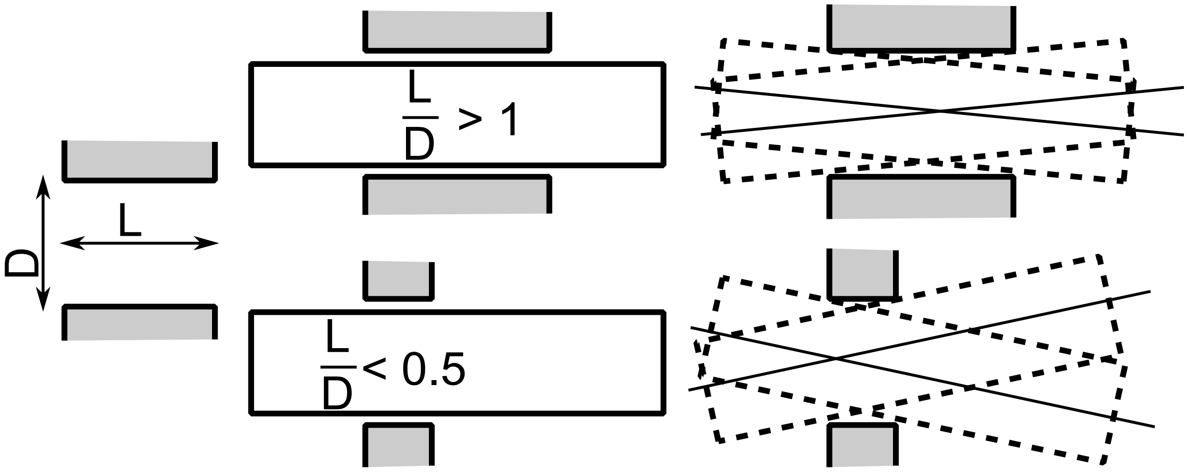
1.2. Liaison réelle

Définition : Une liaison **géométriquement sans défaut, sans jeu et sans frottement** est dite **parfaite**.

Remarque : Le modèle mécanique d'une liaison réelle, est une liaison parfaite dont le comportement correspond au mieux à celui de la liaison réelle en fonction de ce que l'on souhaite étudier.

Exemple : Choix d'un modèle de liaison - Exemple type du contact cylindre/cylindre.

L'exemple type est le contact cylindre/cylindre. La liaison réelle possède forcément du jeu sinon le mouvement est impossible : présence de « petites translations » et de « petits débattements angulaires ».



On choisit souvent le modèle grâce à un critère, tel que le rapport dimension longitudinale / dimension transversale.

- Si **L/D > 1**, la liaison est considérée comme « longue » (débattements angulaires négligés devant la rotation sur l'axe).
- Si **L/D < 0.5**, la liaison sera considérée comme « courte » (débattements angulaires non négligés). Le jeu radial est négligé devant la translation longitudinale.

Les valeurs tests dépendent du type de mécanisme, de la qualité de réalisation, des composants et de l'étude.

Une fois le critère appliqué et le modèle choisi, la liaison associée au contact réel sera un pivot glissant parfait ou une linéaire annulaire parfaite.

Théorie des mécanismes ⇔ modèles mécaniques avec liaisons parfaites.

2. Rappels de mécanique : (VOIR COURS DE SUP')

2.1. Graphe des liaisons

Définition : Un graphe des liaisons modélise un mécanisme :

- structurellement si on fait apparaître chaque liaison entre les solides,
- cinématiquement si on ne fait apparaître que les mouvements relatifs.

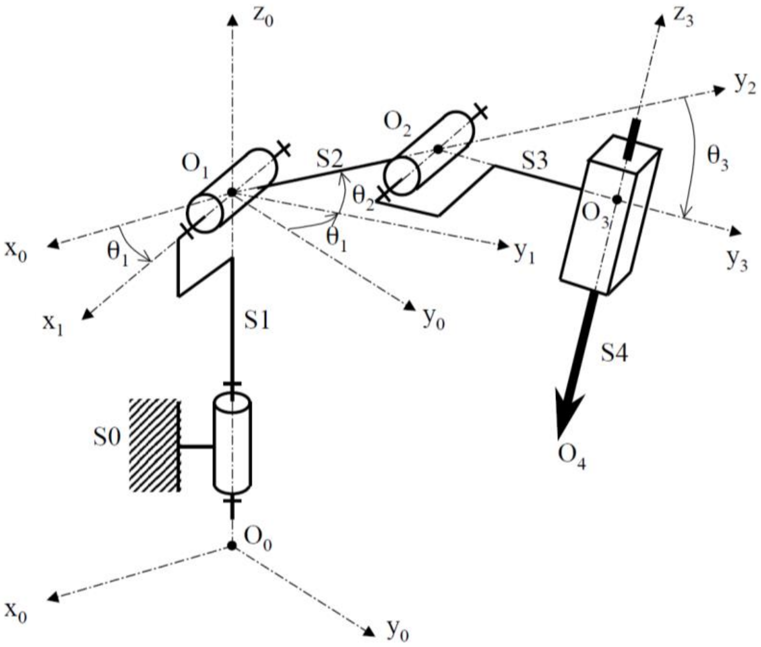
2.2. Chaînes de solides

2.2.1. Chaîne ouverte

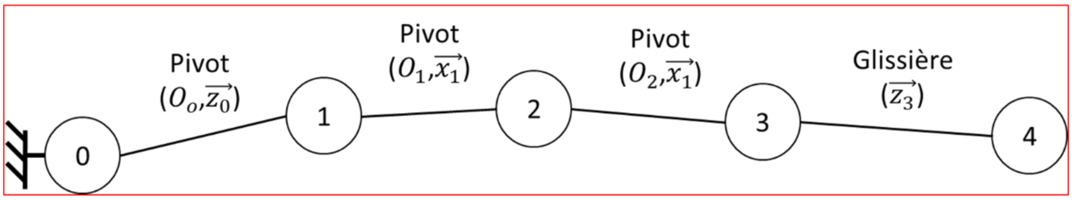
Définition : Un mécanisme est dit en chaîne ouverte lorsque son graphe des liaisons n'est pas bouclé. Cela caractérise les mécanismes de type bras de robot.

<u>Exemple :</u> Bras de robot

- schéma cinématique



- Graphe des liaisons



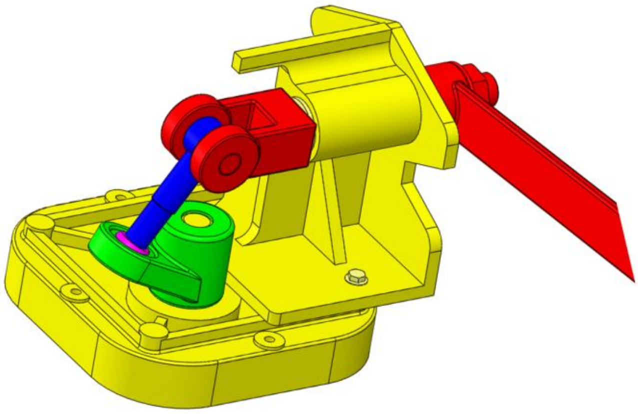
<u>Chaîne ouverte :</u> pas de boucle ou de cycles.

2.2.2. Chaîne fermée

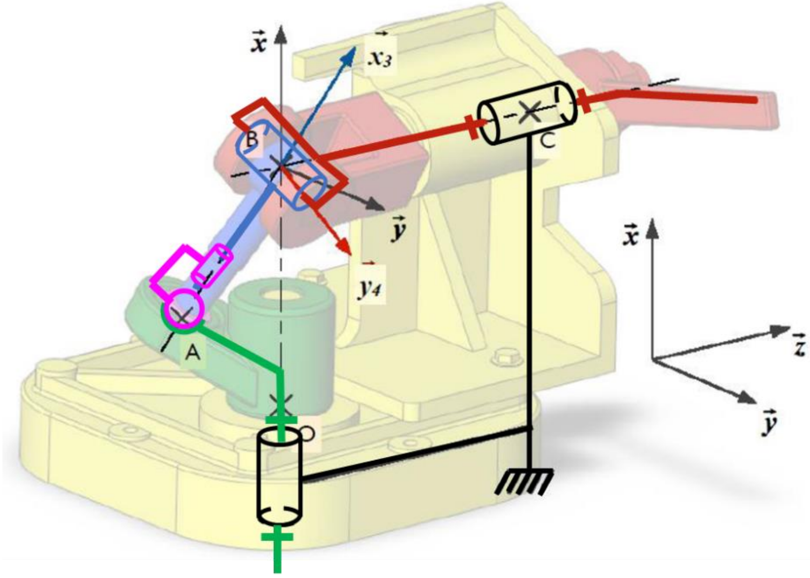
<u>Définition :</u> Un mécanisme est dit en chaîne fermée lorsque son graphe des liaisons est bouclé ou présente un cycle.

Cela caractérise les mécanismes de type transformation de mouvement.

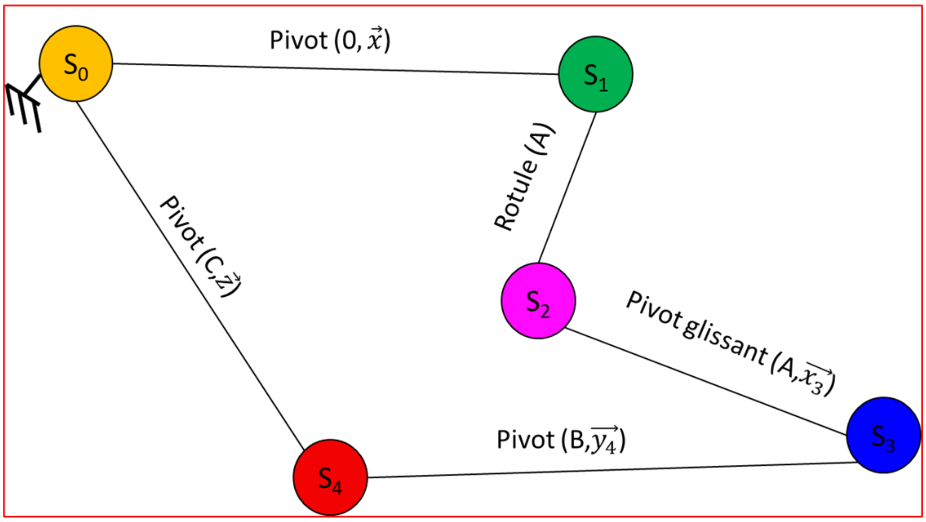
Exemple : Barrière sinusmatique



- Schéma cinématique



- Graphe des liaisons

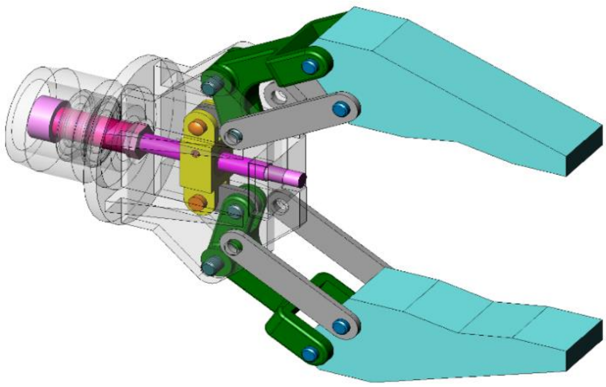


Chaîne fermée : boucle ou cycle

2.2.3. Chaîne complexe

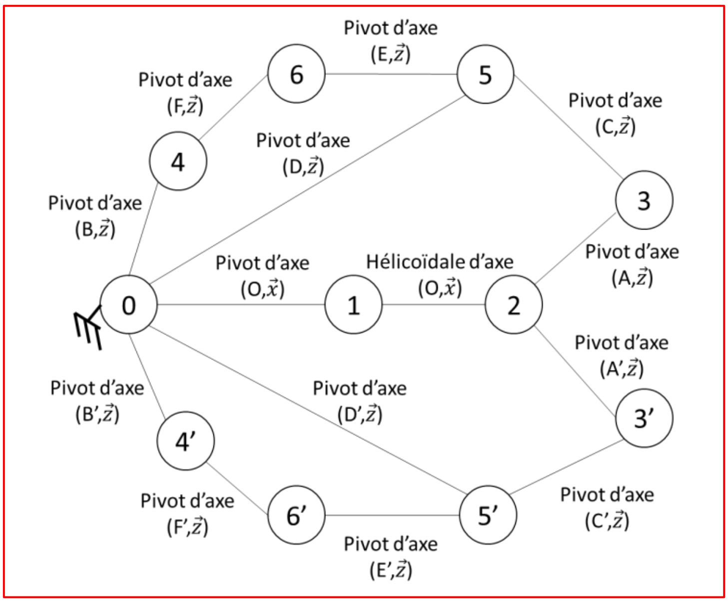
Définition : Un mécanisme à chaîne complexe est un mécanisme pour lequel le graphe des liaisons présente des cycles imbriqués (partie de chaînes fermées) avec ou sans des parties de chaînes ouvertes.

Exemple : Pince d'un robot



- Schéma cinématique (de la partie supérieure de la pince)

- Graphe des liaisons (complet)



10 cycles mais seulement 4 cycles indépendants : *0-5-6-4-0, 0-5-3-2-1-0, 0-1-2-3'-5'-0* et *0-5'-6'-4'-0*

2.3. Nombre cyclomatique

<u>Définition :</u> Le nombre cyclomatique γ est le nombre de boucles indépendantes du graphe des liaisons d'un mécanisme.

Sur l'exemple de la pince du robot ci-dessus, on a 10 boucles mais uniquement 4 sont indépendantes On a donc $\gamma = 4$.

Notons :

- l le nombre de liaisons du graphe des liaisons
- p le nombre de solides du graphe des liaisons

On a la relation suivante entre ces deux quantités et le nombre cyclomatique :

$$\boldsymbol{\gamma = l - p + 1}$$

<u>Vérifions-la sur notre exemple :</u>

La pince du robot possède 11 solides et 14 liaisons. On a donc $l = 14$ et $p = 11$. Ce qui donne : $\gamma = 14 - 11 + 1 = 4$ cycles indépendants.

Le nombre cyclomatique nous permet de connaître le nombre d'équations dans le cas d'une approche cinématique (il y aura $6 * \gamma$ équations)

3. RAPPELS DE CINEMATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

3.1. Torseurs

Le torseur cinématique du solide 1 dans son mouvement par rapport au repère R est constitué de deux éléments de réduction :

- $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}}$: le vecteur (taux de) rotation du solide 1 par rapport au repère R.
- $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}}$: la vitesse du point A appartenant au solide 1 par rapport repère R.

$$\{\boldsymbol{V_{R_1/R}}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{A}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega_x} & \boldsymbol{V_x} \\ \boldsymbol{\omega_y} & \boldsymbol{V_y} \\ \boldsymbol{\omega_z} & \boldsymbol{V_z} \end{Bmatrix}_{\boldsymbol{A,R}}$$

- Un torseur cinématique caractérise entièrement le mouvement relatif de deux solides.
- L'écriture d'un torseur dépend de son point d'application du moment.
- Si la vitesse est calculée au point A, on dira que le torseur cinématique est réduit au point A.

<u>Attention :</u> Pour faire la somme de deux torseurs, ils doivent être écrits au même point ! !

3.2. Formules importantes

Dérivation vectorielle :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{U_1}\right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{U_1}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{U_1}$$

Formule de changement de point / Varignon (BABAR) :

$$\overrightarrow{V_{B\in R_1/R}} = \overrightarrow{V_{A\in R_1/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \qquad \textit{(BABAR)}$$

Composition des mouvements (« Indiana Jones ») :

$$\{V_{2/0}\} = \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\}$$

Pour les vitesses de rotations :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

Les vitesses linéaires :

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$$

Condition de roulement sans glissement en I de S_2/S_1 :

$$\overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} = \vec{0}$$

Condition de maintien du contact :

Soient deux solides S_1 et S_2 en contact en un point I, avec $\vec{n}$ la normale au contact et $\vec{t}$ un vecteur appartenant au plan tangent au contact.

$$\overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} \cdot \vec{n} = 0$$

3.3. Méthodologie

3.3.1. Calcul de vitesse

Pour résoudre un problème de cinématique ou pour trouver la vitesse d'un point d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel, on adopte souvent la démarche suivante :

Décomposer la vitesse en mouvements élémentaires (rotation ou translation) grâce à la relation de composition des vecteurs vitesse.

Par exemple : $\overrightarrow{V(M \in 3/0)} = \overrightarrow{V(M \in 3/2)} + \overrightarrow{V(M \in 2/1)} + \overrightarrow{V(M \in 1/0)}$

Selon les mouvements élémentaires obtenus :

- Si le mouvement élémentaire est une **rotation**, utiliser la **formule de changement de point** en passant par un point appartenant à l'axe de rotation (vitesse nulle sur l'axe de rotation). Par exemple si 1/0 est une rotation et que **A appartient à l'axe de rotation de 1/0**, alors : $\boldsymbol{\overrightarrow{V(M \in 1/0)} = \vec{0} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}}$

- Si le mouvement élémentaire est une **translation** alors la **vitesse est la même pour tous les points du solide**. On utilise alors la formule de dérivation vectorielle en prenant un point qui appartient réellement au solide et pour lequel le vecteur position est simple à exprimer. Par exemple si 2/1 est une translation, P un point appartenant à 2 et O_1 un point fixe dans R_1, alors $\boldsymbol{\overrightarrow{V(M \in 2/1)} = \overrightarrow{V(P \in 2/1)}} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_{R_1}$
  <u>**Autre méthode (plus rapide) :**</u> On utilise la **dérivée du paramètre qui varie**, **selon l'axe du mouvement** : si le point M varie de $x(t)$ dans le sens $\vec{x}$ alors $\boldsymbol{\overrightarrow{V(M \in 2/1)} = \dot{x}(t).\vec{x}}$

- Si le mouvement est une **combinaison de rotation(s) et de translation(s)** et que l'on ne peut pas les décomposer, **on cherche un point du solide pour lequel on peut trouver la vitesse par dérivation vectorielle (attention aux conditions d'appartenance) ou un point pour lequel la vitesse est donnée puis on utilise la relation de changement de point**. Par exemple, si je connais la vitesse de $B \in 3$ pour le mouvement de 3/2 alors je peux déterminer $\boldsymbol{\overrightarrow{V(M \in 3/2)} = \overrightarrow{V(B \in 3/2)} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}}}$. Je peux utiliser la composition des vecteurs rotation pour $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$.

3.3.2. Loi Entrée/Sortie

<u>**Géométrique :**</u>

Fermeture géométrique avec CHASLES + Projection dans la base de référence + Elimination d'un des paramètres (si angle, $cos^2\beta + sin^2\beta = 1$). Dérivation pour avoir la loi E/S cinématique.

<u>**Cinématique :**</u>

Fermeture cinématique (composition des mouvements) + Choix du point de réduction de tous les torseurs + Ecriture des 6 équations. Autant de fermetures à faire qu'il y a de cycles indépendants.

4. RAPPELS DE STATIQUE (VOIR COURS DE SUP')

4.1. Torseurs

Toute action mécanique peut être entièrement caractérisée d'un point de vue mécanique par un torseur.

$$\{T_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{C,2\to1}} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} R_x & M_{cx} \\ R_y & M_{cy} \\ R_z & M_{cz} \end{Bmatrix}_{C,R}$$

$\overrightarrow{R_{2\to1}}$: Résultante du torseur des actions mécaniques du solide 2 sur le solide 1

$\overrightarrow{M_{C,2\to1}}$: Moment au point C du torseur des actions mécaniques du solide 2 sur le solide 1.

Torseur glisseur

Un glisseur est un torseur associé à un vecteur lié $\{\boldsymbol{T}_{ext\to S}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{F}_{ext\to S}} \\ \vec{\boldsymbol{0}} \end{Bmatrix}_A$

Torseur couple

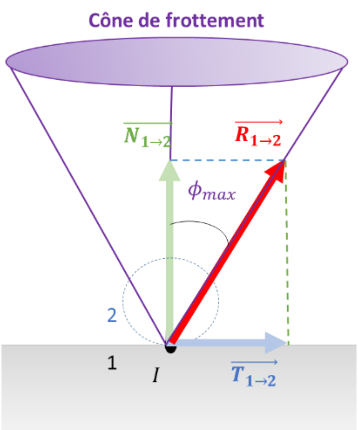
Un torseur couple est un torseur à résultante nulle $\{\boldsymbol{T}_{ext\to S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{0}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{M}_{A,ext\to S}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{0}} \\ \vec{\boldsymbol{M}} \end{Bmatrix}_A$

4.2. Formules importantes

<u>Relation de changement de point (BABAR) :</u>

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_{B,2\to1}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}_{A,2\to1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{R}_{2\to1}}$$

<u>Frottements et loi de Coulomb :</u>



$\overrightarrow{R_{1\to2}}$ ne peut <u>JAMAIS SORTIR</u> du cône de frottement.

Loi de Coulomb $\left\|\overrightarrow{T_{1\to2}}\right\| = f.\left\|\overrightarrow{N_{1\to2}}\right\|$ avec $f = \tan\varphi_{max}$

4.3. Méthodologie

$\{T_{\bar{E}\to E}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} \\ \overrightarrow{M_{A,\bar{E}\to E}} \end{Bmatrix}_A$ A étant un point quelconque de l'espace.

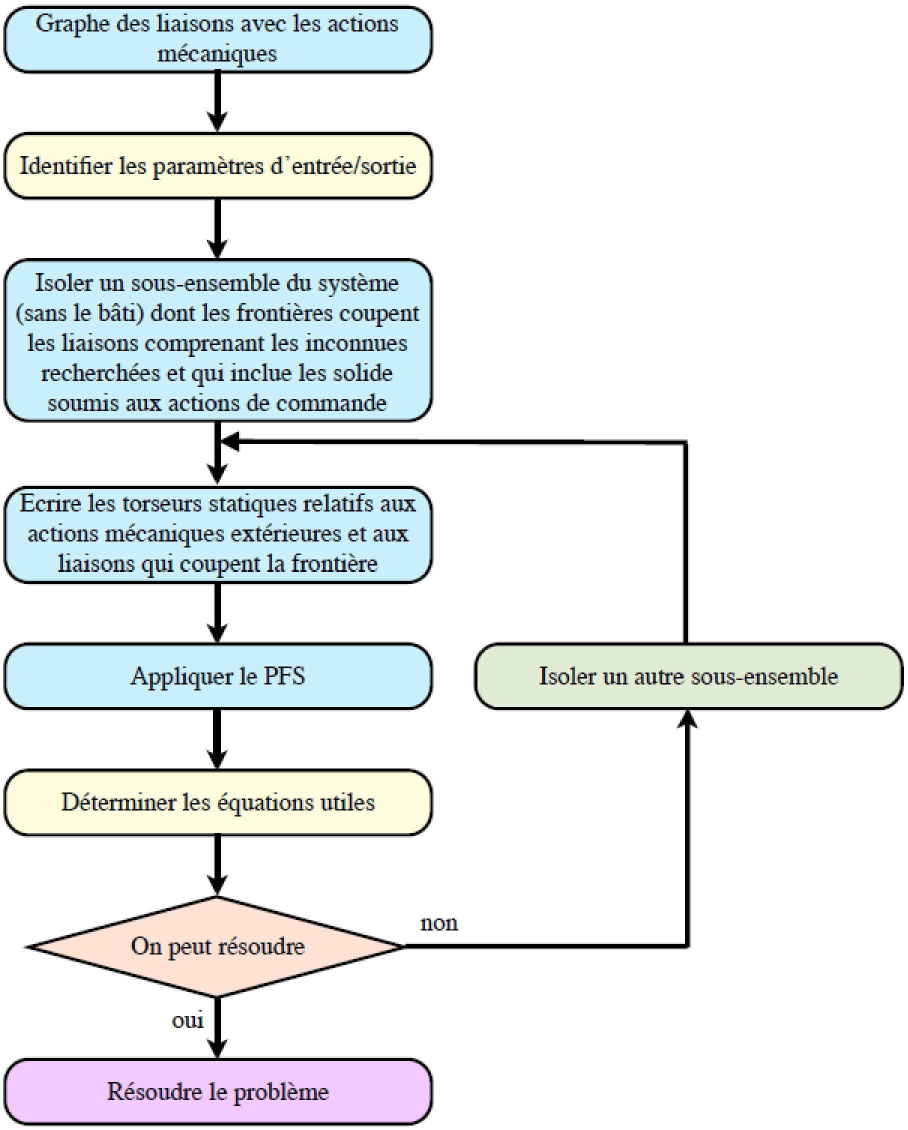
Pour un solide E en équilibre par rapport à un repère galiléen, le principe fondamental de la statique peut se décliner en deux théorèmes :

<u>Théorème de la Résultante Statique (TRS)</u> :

$$\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} = \vec{0}$$

<u>Théorème du Moment Statique (TMS) en A</u> :

$$\overrightarrow{M_{A,\bar{E}\to E}} = \vec{0}$$



5. Lien entre la cinématique et la statique

TORSEURS DES LIAISONS A CONNAITRE PAR CŒUR !!!!!

La puissance développée par les actions de 1→2 dans la liaison est définie par le comoment :

$$P_{12} = \{T(1\to2)\}\otimes\{V(2/1)\} = \overrightarrow{R_{12}}.\overrightarrow{V(A,2/1)} + \overrightarrow{M(A,1\to2)}.\overrightarrow{\Omega_{21}}$$

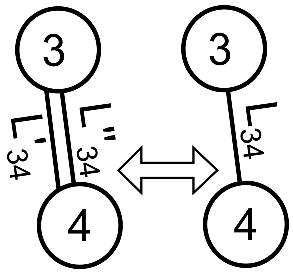
Du fait du modèle adopté (liaison parfaite donc sans frottement), la puissance développée par le torseur des inter-efforts est nulle.

$$\mathbf{P_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{I_S + I_C = 6}}$$

6. Liaisons équivalentes

<u>Définition :</u> Une **liaison équivalente** est une liaison du tableau normalisé qui a le même comportement que l'association de liaisons **en série** ou **en parallèle** qu'elle remplace. Elle transmet la **même action mécanique** et elle autorise le **même mouvement** que l'association de liaisons.

6.1. Liaisons en parallèle



6.1.1. Méthode statique

On écrit l'équilibre de chaque solide appartenant à la boucle.

<u>Torseur statique équivalent :</u>

$$\left\{\boldsymbol{T}_{eq_{L34}}\right\}_{\boldsymbol{M}} = \left\{\boldsymbol{T}_{L'_{34}}\right\}_{\boldsymbol{M}} + \left\{\boldsymbol{T}_{L''_{34}}\right\}_{\boldsymbol{M}} + \left\{\boldsymbol{T}_{L'''_{34}}\right\}_{\boldsymbol{M}} + \cdots + \left\{\boldsymbol{T}_{L^{n}_{34}}\right\}_{\boldsymbol{M}}$$

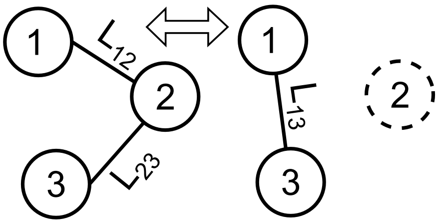
6.1.2. Méthode cinématique

On écrit les fermetures géométriques de chaînes associées.

<u>Torseur cinématique équivalent :</u>

$$\left\{\boldsymbol{V}_{eq_{L34}}\right\}_{\boldsymbol{M}} = \left\{\boldsymbol{V}_{L'_{34}}\right\}_{\boldsymbol{M}} = \left\{\boldsymbol{V}_{L''_{34}}\right\}_{\boldsymbol{M}} = \left\{\boldsymbol{V}_{L'''_{34}}\right\}_{\boldsymbol{M}} = \cdots = \left\{\boldsymbol{V}_{L^{n}_{34}}\right\}_{\boldsymbol{M}}$$

6.2. Liaison série



6.2.1. Méthode statique

On écrit les équilibres des solides étudiés.

Torseur statique équivalent :

$$\{\boldsymbol{T}_{eq_{L13}}\}_{\boldsymbol{M}} = \{\boldsymbol{T}_{L_{12}}\}_{\boldsymbol{M}} = \{\boldsymbol{T}_{L_{2N}}\}_{\boldsymbol{M}} = \cdots = \{\boldsymbol{T}_{L_{P3}}\}_{\boldsymbol{M}} = \{\boldsymbol{T}_{L_{23}}\}_{\boldsymbol{M}}$$

6.2.2. Méthode cinématique

On réalise une composition des mouvements.

Torseur cinématique équivalent :

$$\{\boldsymbol{V}_{eq_{L13}}\}_{\boldsymbol{M}} = \{\boldsymbol{V}_{L_{12}}\}_{\boldsymbol{M}} + \{\boldsymbol{V}_{L_{2N}}\}_{\boldsymbol{M}} + \cdots + \{\boldsymbol{V}_{L_{P3}}\}_{\boldsymbol{M}}\{\boldsymbol{V}_{L_{23}}\}_{\boldsymbol{M}}$$

Remarque : Les liaisons équivalentes aux liaisons séries sont toujours isostatiques donc h = 0.

6.3. Conclusions

Outre qu'elle permette de simplifier le schéma de structure pour aboutir au schéma cinématique, la réduction des liaisons parallèles permet de localiser très facilement certaines sources d'hyperstatisme. Cela peut justifier de traiter d'abord les liaisons parallèles puis de la chaîne réduite, plutôt que directement la chaîne complexe.

La réduction des liaisons séries permet quant à elle d'aboutir au schéma cinématique minimum ou schéma de principe (on a éliminé des pièces et souvent des mobilités internes). Elle permet donc une étude simplifiée des lois E/S et des équations de mouvement. Attention, cette réduction ne modifie pas le degré d'hyperstatisme mais peut abaisser le degré de mobilité (les mobilités internes disparaissent).

7. Mobilités – Mobilité utile – Mobilité interne

7.1. Mobilités d'un mécanisme

Mathématiquement : La résolution du système d'équations prend en compte son rang, noté r_c. Pour un système, il y a, au maximum, $6 * \gamma$ équations cinématiques. Le rang désigne le nombre d'équations indépendantes. C'est également le nombre d'équation significative. On définit la mobilité du mécanisme m (entier positif ou nul) :

$$\boldsymbol{m = I_c - r_c}$$

Mécaniquement : La mobilité d'un mécanisme est le nombre de paramètres cinématiques indépendants qu'il faut définir pour connaître les mouvements de toutes les pièces du mécanisme.

La mobilité m se décompose de la manière suivante : $\boldsymbol{m = m_u + m_i}$

Avec : m_u : **mobilité utile** et m_i : **mobilité interne**

<u>Remarque :</u> m est la différence entre le nombre d'inconnues cinématiques de liaison I_c et le nombre d'équations cinématiques indépendantes (dites utiles).

7.2. Mobilité utile

m_u : **mobilité utile,** correspond au nombre de paramètres cinématiques indépendants qu'il faut définir pour connaitre les mouvements des pièces d'entrée et de sortie d'un mécanisme.

$\boldsymbol{m_u}$ correspond au nombre de lois E/S.

<u>NB :</u> La mobilité utile est liée à la fonction principale du mécanisme (par exemple pour un système bielle-manivelle : mobilité utile de transformation d'une rotation en une translation). Il y a généralement autant d'actionneurs (exemple : moteurs, vérins) que de mobilités utiles dans un mécanisme.

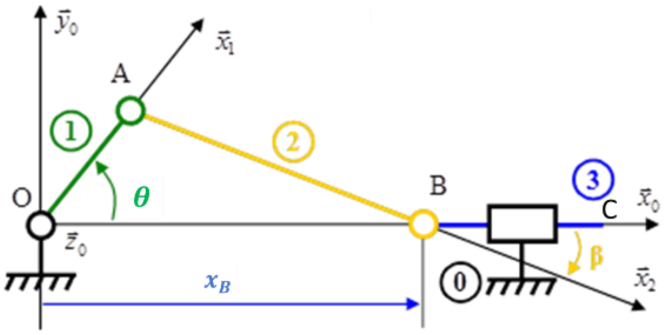
7.3. Mobilité interne

m_i : **mobilité interne** est le nombre de paramètres cinématiques indépendants (donc d'équations indépendantes) qu'il faut définir pour connaitre les mouvements des pièces internes d'un mécanisme (pièces qui ne jouent aucun rôle dans la transmission du mouvement de l'entrée vers la sortie).

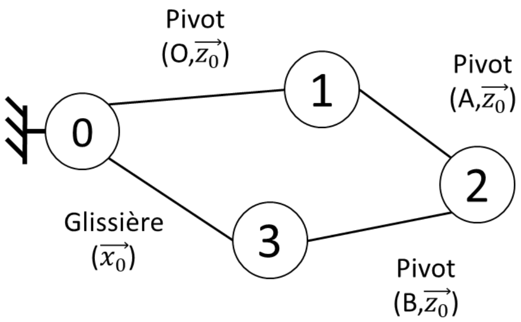
$\boldsymbol{m_i}$ correspond au nombre de mouvements indépendants ne faisant intervenir aucun des paramètres d'entrée-sortie.

7.4. Exemples

7.4.1. Système Bielle – Manivelle – Piston



<u>Graphe des liaisons :</u>



De façon évidente, en les comptant sur le graphe des liaisons ou sur le schéma cinématique :
$l = 4$ et $p = 4$

$$I_c = \underbrace{1+1+1}_{3\ pivots} + \underbrace{1}_{1\ glissière} = 4$$

On vérifie bien : $\gamma = l - p + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$

La fermeture cinématique s'écrit : $\{V_{0/3}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\} = \{0\}$

Soit : $$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 0/3}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 3/2}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$\overrightarrow{V_{A\in 0/3}} = -\overrightarrow{V_{B\in 3/0}} = -\dot{x}.\overrightarrow{x_0}$

$\overrightarrow{V_{A\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{B\in 3/2}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = L_2.\overrightarrow{x_2} \wedge -\dot{\beta}.\overrightarrow{z_0} = L_2.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2}$

$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \vec{0}$

$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = L_1.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1}$

Système de 6 équations à 4 inconnues ($N_c = 4$)

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} = 0 \\ -L_1.\dot{\alpha}.sin\alpha - L_2.\dot{\beta}.sin\beta - \dot{x} = 0 \\ L_1.\dot{\alpha}.cosa + L_2.\dot{\beta}.cos\beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

3 équations indépendantes donc $r_c = 3$.

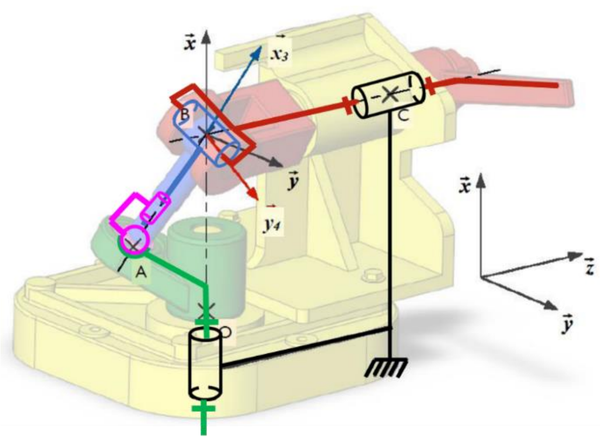
$$m = I_c - r_c = 1$$

Une seule mobilité utile (entrée : rotation θ, sortie : translation x) et pas de mobilité interne.

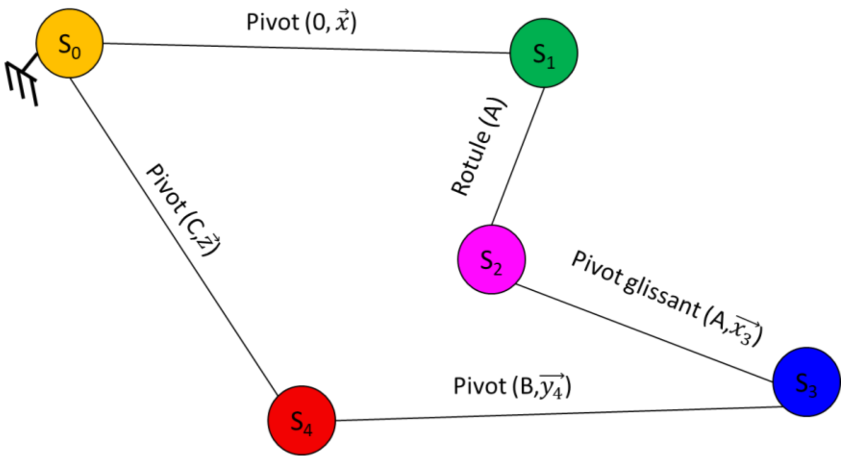
$$m = 1 = \underbrace{1}_{m_u} + \underbrace{0}_{m_i}$$

7.4.2. Barrière sinusmatique

<u>Schéma cinématique :</u>



<u>Graphe des liaisons :</u>



$$m = 2 = \underbrace{1}_{m_u} + \underbrace{1}_{m_i}$$

8. Hyperstatisme

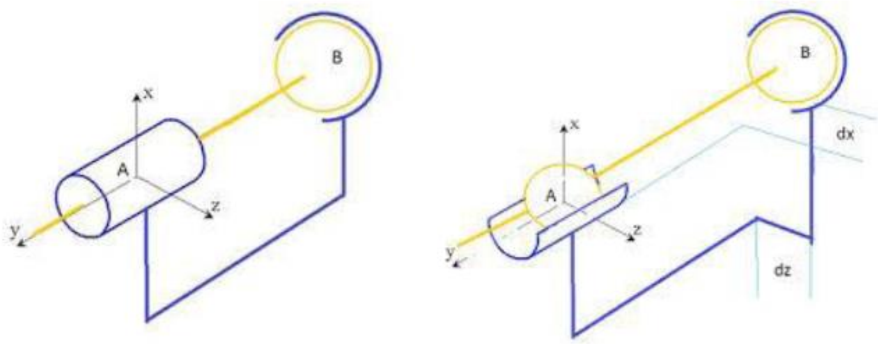
8.1. Hyperstaticité

Définition : L'hyperstaticité ou le degré d'hyperstatisme h d'un modèle est un nombre entier correspondant au nombre de conditions géométriques à imposer pour que le système puisse se monter et fonctionner.

Autrement dit, c'est la différence entre le nombre d'inconnues statiques de liaison I_s et le nombre d'équations statiques indépendantes (dites utiles) noté r_s. On a donc $h = I_s - r_s$

Si le degré d'hyperstatisme d'un modèle est supérieur à zéro, il est impossible de déterminer l'ensemble des inconnues statiques. Il faudra alors substituer des liaisons afin d'obtenir un modèle dit isostatique ($h = 0$) pour pouvoir résoudre.

On parle d'isostatisme lorsque le fonctionnement d'un mécanisme se fait sans contrainte excessive.



Liaison pivot dite hyperstatique (à gauche) et isostatique (à droite)

Une solution technique isostatique (sans contrainte géométrique) est souvent recherchée car dans ce cas les conditions de montage sont simples et les défauts d'usinages ne sont pas compromettant.

Cependant, une solution technique hyperstatique présente l'avantage d'être plus rigide, plus robuste (du fait du nombre de contact surabondants). Ceci est particulièrement utile pour certaines pièces naturellement déformable (dû au matériau utilisé ou à une forme élancée par exemple) ou lorsque les efforts en jeu sont très importants (machines-outils par exemple).

Remarque : **Une chaîne simple ouverte ne peut pas être hyperstatique.** Le rang du système d'équations statiques est forcément égal au nombre d'inconnues.

8.2. Approche cinématique

La loi de composition de mouvement (fermeture cinématique) appliquée à chacune des γ chaines indépendantes du mécanisme permet d'écrire pour chacune :

$$\forall i, \{V_{i/i}\} = \{0\}$$

Nombre d'équations cinématiques

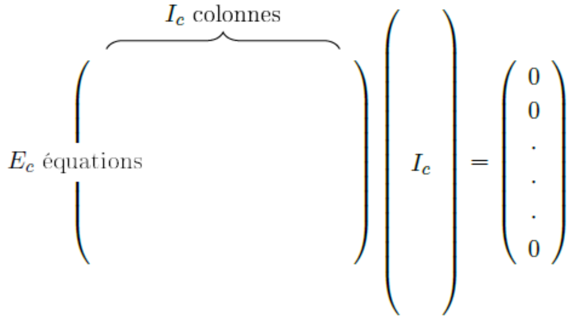
Il y a donc autant d'équations torsorielles indépendantes que de chaînes fermées indépendantes. On pose E_c le nombre d'équations scalaires issues de ces équations de fermeture cinématique, donné par :

$$\boldsymbol{E_c = 6.\gamma}$$

Nombre d'inconnues cinématiques

Soit I_c le nombre d'inconnues cinématiques. Ce nombre se détermine en sommant les degrés de liberté de chacune des l liaisons. Le nombre d'inconnues dépend donc du modèle adopté pour les liaisons.

Il faut donc résoudre le système de E_c équations obtenues à I_c inconnues. Ce système est un système linéaire homogène, qui peut être écrit sous la forme matricielle ci-contre.



Degré d'hyperstatisme

On définit h le degré d'hyperstatisme par :

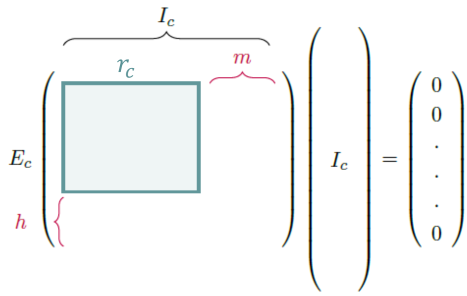
$$\boldsymbol{h = E_c - r_c}$$

Mathématiquement : h exprime le nombre d'équations ne servant pas à la résolution, le plus souvent de la forme 0 = 0.

Mécaniquement : h définit le nombre de degrés de liberté à ajouter pour garantir un montage et un fonctionnement sans contrainte du mécanisme

Finalement, la forme du système d'équation peut être présentée de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned} m &= I_c - r_c \\ h &= E_c - r_c \end{aligned}\right\} \quad \boldsymbol{h = m - I_c + E_c}$$



8.3. Approche statique

Ce paragraphe détaille une seconde approche de la théorie des mécanismes qui conduit au même résultat que précédemment. Dans ce cours, l'approche est menée en statique, elle se généralise très simplement à la dynamique.

Nombre d'équations statiques

Une étude statique systématique est menée en étudiant l'équilibre de chacune des pièces du mécanisme.
L'équilibre étant nécessairement relatif à une de ces pièces, prise comme référentiel, on dénombre alors $p-1$ solides à étudier.

Remarque : Le « -1 » correspond au bâti que l'on ne peut pas l'isoler (☠) !

Soit E_s le nombre d'équations scalaires obtenues après une étude du système :

$$E_s = 6.(p-1)$$

Nombre d'inconnues statiques

Soit I_s le nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons du mécanisme.
Ce nombre se détermine en sommant les nombres de paramètres d'actions mécaniques transmissibles par chacune des l liaisons *(le nombre de X, Y, Z, L, M, N dans les torseurs de liaisons).*
Encore une fois, le nombre d'inconnues statiques de liaison dépend de la nature des modèles adoptés pour les liaisons.
Il faut résoudre le système de E_s équations obtenues à I_s inconnues.
Ce système est un système linéaire avec second membre, qui peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\hspace{4cm}}^{I_s \text{ colonnes}} \\ E_s \text{ équations} & \left(\begin{array}{c} \hspace{4cm} \\ \\ \\ \end{array}\right) \end{array} \left(\begin{array}{c} \\ I_s \\ \\ \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \text{(1) Composantes} \\ \text{d'actions mécaniques} \\ \text{extérieures autres} \\ \text{que les } I_s \\ \\ \text{(2) Composantes} \\ \text{dynamiques} \end{array}\right)$$

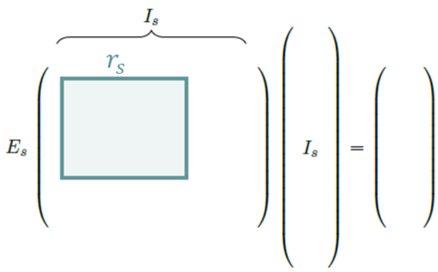
(1) : Poids - Couple ou effort, moteur ou résistant - actions mécaniques externes ou internes dues à des éléments déformables ...

(2) : cf. cours de dynamique, égales à 0 en statique.

Remarque : On constate l'égalité suivante : $I_c - E_c = E_s - I_s$

Degré d'hyperstatisme

La résolution du système d'équations précédent prend en compte son rang, noté r_s (nombre d'équations indépendantes).



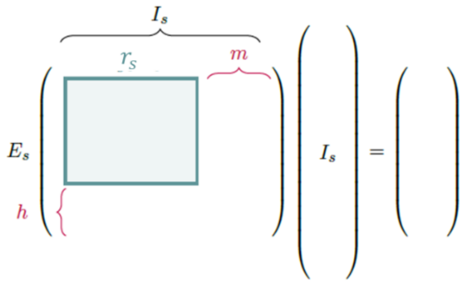
Mathématiquement : On définit le degré d'hyperstatisme h par $\boldsymbol{h = I_s - r_s}$

Mécaniquement : Le degré d'hyperstatisme h représente le nombre d'inconnues ne pouvant pas être déterminées à l'aide de la statique ou de la dynamique.

Mobilités

Mathématiquement : On peut définir la mobilité par $\boldsymbol{m = E_s - r_s}$. Cela représente le nombre d'équations ne servant pas à la résolution *(le plus souvent de la forme 0 = 0 pour l'équation homogène associée).*

Finalement, la forme du système d'équation peut être présentée de la manière suivante :



On a donc $\left.\begin{array}{r} m = E_s - r_s \\ h = I_s - r_s \end{array}\right\}$ $\boldsymbol{h = m - E_s + I_s}$

Remarque : Ce résultat est bien identique à celui trouvé par l'approche cinématique car $I_c - E_c = E_s - I_s$

Remarque : Les équations « inutiles » (combinaisons linéaires des autres ou du type 0 = 0) traduisent des mobilités dans le mécanisme.

8.4. Approche globale – Relation entre mobilité et hyperstatisme

En utilisant la définition de la mobilité et de l'hyperstatisme dans chaque approche, on peut tirer une équation globale ne faisant pas intervenir le rang.

Approche cinématique : $\boldsymbol{h = m - I_c + E_c}$

Approche statique : $\boldsymbol{h = m - E_s + I_s}$

Remarque importante : Il existe également l'indice de mobilité I donné par $I = I_c - E_c = E_s - I_s$ ou encore $I = m - h$ donc $h = m - I$.

8.5. Problème plan

Dans le cas d'une modélisation plane, les développements précédents restent valables, mais on ne peut écrire que trois équations (par fermeture cinématique ou PFS).

On obtient donc les relations :

• par l'approche cinématique : $\boldsymbol{h = m + 3.\gamma - I_c}$

• par l'approche statique : $\boldsymbol{h = m + I_s - 3.(p - 1)}$

Remarque : Le degré d'hyperstatisme avec une modélisation plane et avec une modélisation spatiale peuvent diverger. Sauf indication contraire explicite, on calcule un degré spatial.

9. Définition physique de l'hyperstatisme

9.1. Pourquoi concevoir hyperstatique ?

Concevoir un système volontairement hyperstatique est courant, notamment dans le cas de systèmes dans lesquels les efforts mis en jeux sont importants, ou pour les systèmes qu'on souhaite très rigides (pour limiter les déformations par exemple, ou pour la mécanique de précision).

Dans le cas où un mécanisme est hyperstatique, 2 solutions sont à envisager :

- Composer avec cet hyperstatisme pour quand même garantir le bon fonctionnement du mécanisme.
- Rendre le modèle du mécanisme isostatique en modifiant sa structure (choix de liaisons différentes...).

Une conception hyperstatique **augmente la rigidité et la stabilité de l'assemblage et limite les déformations**.

	Avantage	Inconvénient
Mécanisme isostatique h=0	Economique Facilement montable	Souple
Mécanisme hyperstatique h > 0	Rigide (opposé à la montabilité)	Couteux Contraintes géométriques fines

Pour rendre le modèle du mécanisme isostatique, il suffit d'annuler l'une des inconnues de la ou des familles d'inconnues hyperstatiques (cf. approche statique). Ceci s'effectue en **ajoutant un ou plusieurs degrés de liberté** de la chaine fermée **sans ajouter de mobilités** en **modifiant les liaisons et/ou en ajoutant des liaisons et pièces intermédiaires.**

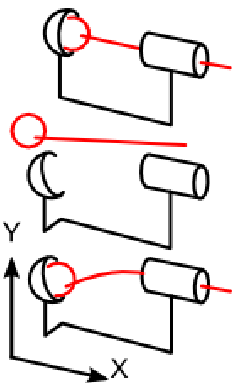
9.2. Hypothèse des liaisons parfaites

Les Liaisons parfaites ⇔ Géométrie parfaite ET sans frottement ET sans jeu.

<u>Exemple :</u> Deux liaisons en parallèles (pivot glissant // rotule) permettant de réaliser un pivot ($1^{\text{ère}}$ figure).

Mais la réalisation parfaite n'existe pas et la réalisation presque parfaite coûte cher ($2^{\text{ème}}$ figure)

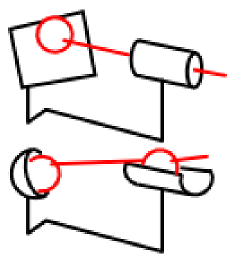
La $3^{\text{ème}}$ figure représente l'assemblage. L'assemblage sera impossible si l'on considère qu'il n'y a pas de jeu et que les pièces sont indéformables.



L'hyperstatisme pose donc physiquement un problème d'assemblage : celui-ci ne sera possible qu'en déformant les pièces OU en installant des jeux (mais alors on change le modèle des liaisons puisque l'on ajoute des mobilités).

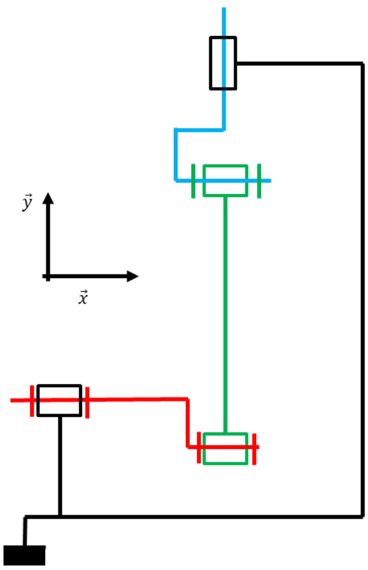
Le degré d'hyperstatisme d'un système correspond physiquement au nombre d'efforts et de couples nécessaires pour déformer le mécanisme et le contraindre à respecter la géométrie définie.

Ici il faudra appliquer 2 efforts selon y et z OU 2 couples autour de y et z pour déformer l'arbre et contraindre la sphère de la rotule dans son logement. On retrouve un degré d'hyperstatisme de 2.



Le degré d'hyperstatisme correspond aussi au nombre de degrés de liaison que l'on doit supprimer (ou au nombre de degrés de liberté qu'il faut ajouter) afin d'arriver à un assemblage sans contrainte.

9.3. Exemple sur le piston-bielle-manivelle

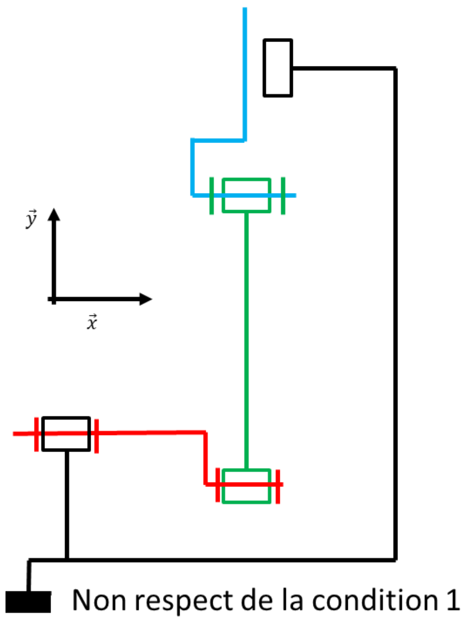


On a $h = (1 + 0) - 5 + 6 * 1 = 2$. Donc ce système ainsi modélisé est hyperstatique d'ordre 2.

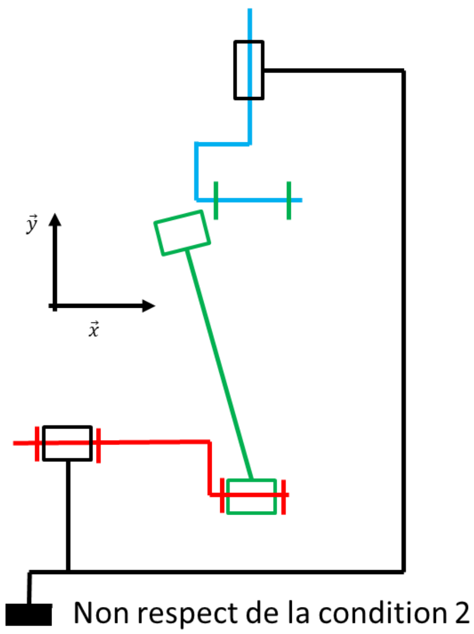
D'une manière générale, un degré d'hyperstatisme est lié à une contrainte géométrique de fonctionnement. Dans le cas étudié, ceci correspond au parallélisme des liaisons d'axe $\vec{y}$.

<u>**Contraintes à respecter :**</u>

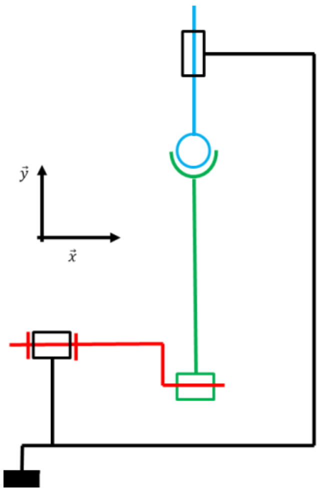
<u>Condition 1 :</u> Alignement dans la liaison pivot glissant entre le piston et le bâti.



<u>Condition 2 :</u> Parallélisme des deux liaisons pivot à chaque extrémité de la bielle.



<u>Réalisation d'une solution isostatique :</u>



<u>Vérification :</u>

- Allure du graphe des liaisons non modifiée.
- Mobilité cinématique : $m = 2. m_u = 1$ car 1 loi E/S et $m_i = 1$ car le piston peut tourner autour de son propre axe.

On a $h = (1 + 1) - 8 + 6 * 1 = 0$. Donc ce système ainsi modélisé est isostatique.

9.4. La conception hyperstatique

<u>Concevoir hyperstatique impose des précautions :</u>

- **Cotation très précise** au niveau du bureau d'étude, réalisation de qualité au niveau de l'atelier $\Rightarrow$ augmentation des coûts.
- **Présence d'éléments de réglage** (cales, pièce mobile au moment de l'assemblage et bloquée ensuite …) qui permettent de positionner les pièces sans contraintes $\Rightarrow$ augmentation de la complexité et des coûts.
- Présence de jeux plus importants que nécessaire au fonctionnement dans une ou toutes les liaisons afin de faciliter l'assemblage $\Rightarrow$ diminution de la précision du guidage.
- Présence d'éléments **déformables** ou exploitation de l'**élasticité** des pièces.

<u>Connaître le degré d'hyperstatisme et ses sources permet :</u>

- De **déterminer les tolérances** à imposer aux dimensions et les conditions géométriques à respecter (coaxialité, parallélisme, etc …).
- De **savoir où imposer des jeux et/ou prévoir des réglages**.
- De prévoir quels éléments doivent être déformables.
- De choisir un ordre d'assemblage.

9.5. Remarques générales

<u>Le degré d'hyperstatisme ne dépend pas</u> :

- Du frottement : les composantes que cela ajoute dans le torseur statique ne sont pas des inconnues.
- Des actions extérieures et des poids, masses et inerties (ce ne sont pas des inconnues de liaison).

La méthode cinématique est intéressante pour une chaîne simple fermée : elle limite le nombre d'équations à 6 (contre $6 * (p-1)$ équations par la statique).

On peut préférer la méthode statique dans le cas des graphes complexes car il n'est pas nécessaire de déterminer le nombre cyclomatique ni de réduire les liaisons parallèles.

10. Méthode globale de résolution

10.1. Ce qu'il faut retenir

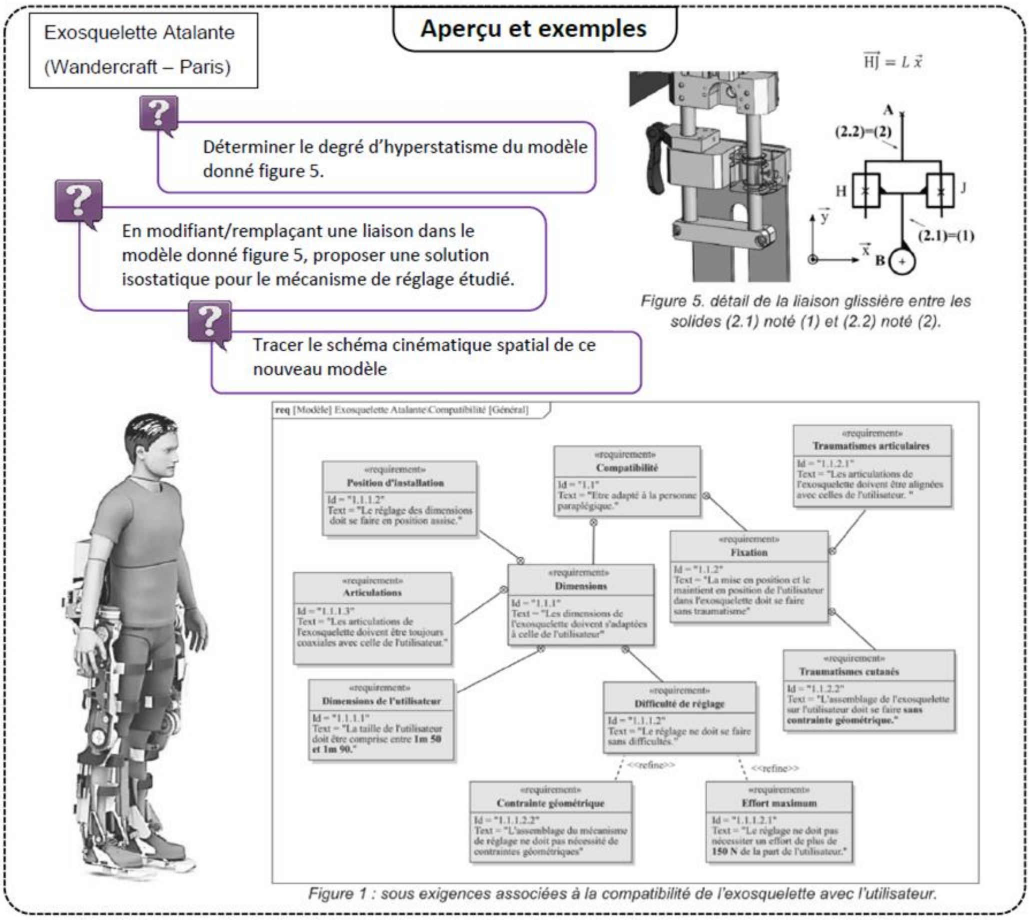
Point de vue	Cinématique	Statique
Inconnues	$I_c = \sum_{i=1}^{i=l} i_{c_i}$	$I_s = \sum_{i=1}^{i=l} i_{s_i}$
Equations	$E_c = 6.\gamma$	$E_s = 6.(p-1)$
Equations indépendantes ou rang du système	$r_c \leq 6.\gamma$	$r_s \leq 6.(p-1)$
Mobilité	$m = I_c - r_c$	$m = E_s - r_s$
Degré d'hyperstatisme	$h = 6.\gamma - r_c$	$h = I_s - r_s$
h par intuition	$h = m - I_c + 6.\gamma$	$h = m - 6.(p-1) + I_s$

10.2. Méthode de résolution

<u>Quelle méthode choisir ?</u>

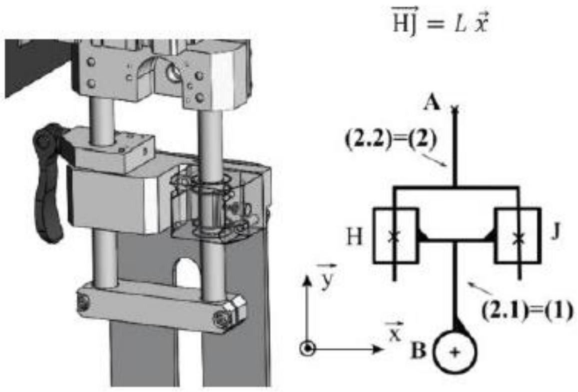
- ⇨ Pour une recherche du degré de mobilité et du **degré d'hyperstatisme**, l'approche **cinématique** est souvent plus commode et rapide, et ce pour deux raisons. Les grandeurs manipulées sont observables et mesurables, et le nombre d'équations à manipuler est en général bien inférieur à celui obtenu par l'approche dynamique (statique).
- ⇨ Pour la **recherche de l'isostatisme** ou des conditions géométrique et dimensionnelle associées à l'hyperstatisme, une **approche statique** est à privilégier, ou alors simplement une logique pour l'assemblage (montage) des solides avec des défauts exagérés.

10.3. Exemple de ce qui peut être demandé en concours



Afin que l'exosquelette puisse s'adapter à différentes morphologie (personne mesurant de 1,50m à 1,90m), l'espacement des articulations doit être réglable. Dans le cas du fémur, le réglage se fait en translation à l'aide d'une liaison équivalente à une glissière.

Le modèle initial proposé est le suivant :



Détails de la liaison glissière entre le fémur supérieur et inferieur

Quel est le degré d'hyperstatisme ?

Par l'approche intuitive, la mobilité utile est de 1 (réglage en translation) et il n'y pas de mobilité interne.

$$h = m + I_s - 6.(p-1) = 1 + 8 - 6.(2-1) = 3$$

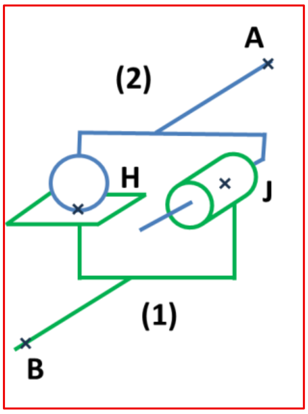
ou

$$h = m - I_c + 6.\gamma = 1 - 4 + 6.1 = 3$$

En modifiant/remplaçant une liaison dans le modèle donné au-dessus, proposer une solution isostatique pour le mécanisme de réglage étudié.

Il faut remplacer une liaison pivot glissant par une liaison ponctuelle de normale $\vec{z}$ (en H ou en J).

Tracer le schéma cinématique spatial de ce nouveau modèle.



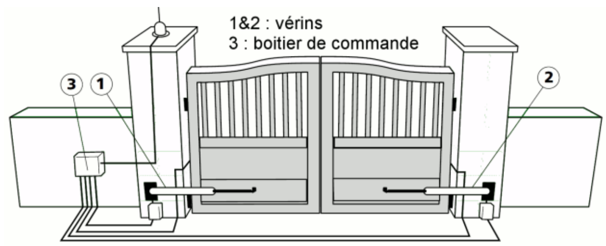
10.4. Stratégie au concours

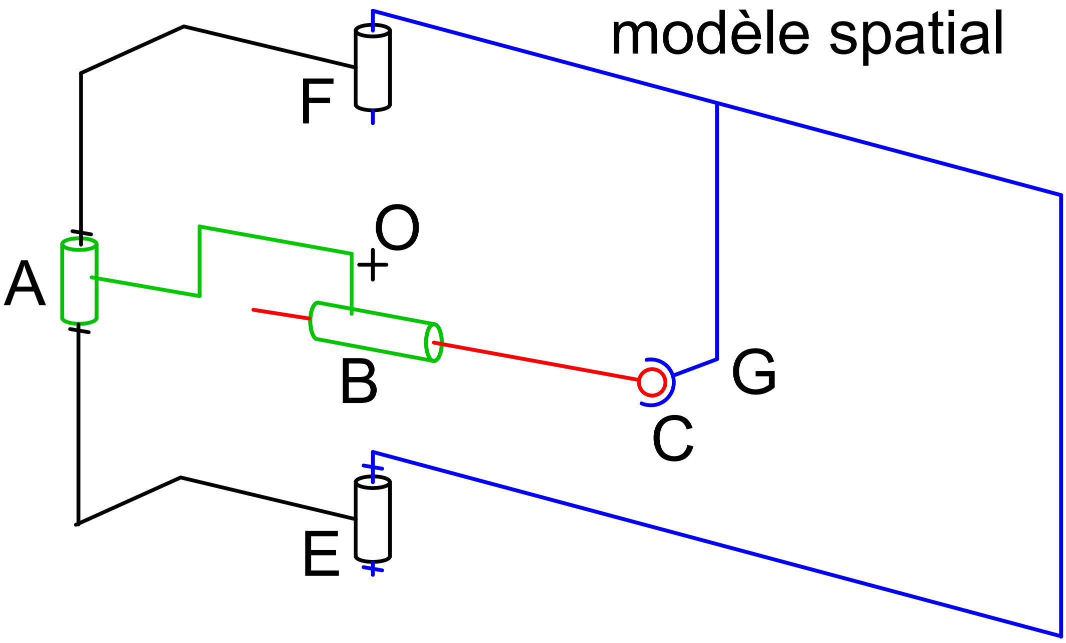
• Le choix d'une ou autre méthode dépend fortement de ce que l'on cherche, du temps imparti pour trouver le résultat, et de ce qu'on vous impose dans le sujet. Si vous êtes totalement libre, la méthode la plus rapide reste la méthode intuitive, mais les résultats que vous obtenez sont dépendants de vos facultés à comprendre le fonctionnement du modèle à partir du schéma cinématique.

• Les approches analytiques sont probablement plus sures quant à la détermination de m et h (à condition qu'il n'y ait pas de fautes de calculs), mais elles sont également beaucoup plus lentes et fastidieuses. L'approche analytique cinématique est souvent plus courte que l'approche analytique statique.

• Si dans le sujet, on vous demande de dimensionner les liaisons, l'approche statique est obligatoire (et il est indispensable de faire intervenir les efforts extérieurs, voire de se placer en dynamique si les quantités d'inertie peuvent influer sur les inter-efforts de liaisons, pour déterminer les inconnues des torseurs des inter-efforts du système en fonctionnement). Dans ce cas, comme toutes les équations sont déjà écrites, il ne reste plus qu'à analyser le système d'équations pour déterminer l'hyperstatisme et les mobilités.

10.5. Exercice : Détermination du degré d'hyperstatisme d'un portail automatique





Questions

Q1 : Paramétrer le système (repères, axes, distances utiles, …).

Q2 : Tracer le graphe des liaisons associé au schéma cinématique.

Q3 : Déterminer le degré d'hyperstatisme en utilisant les formules vues en cours.

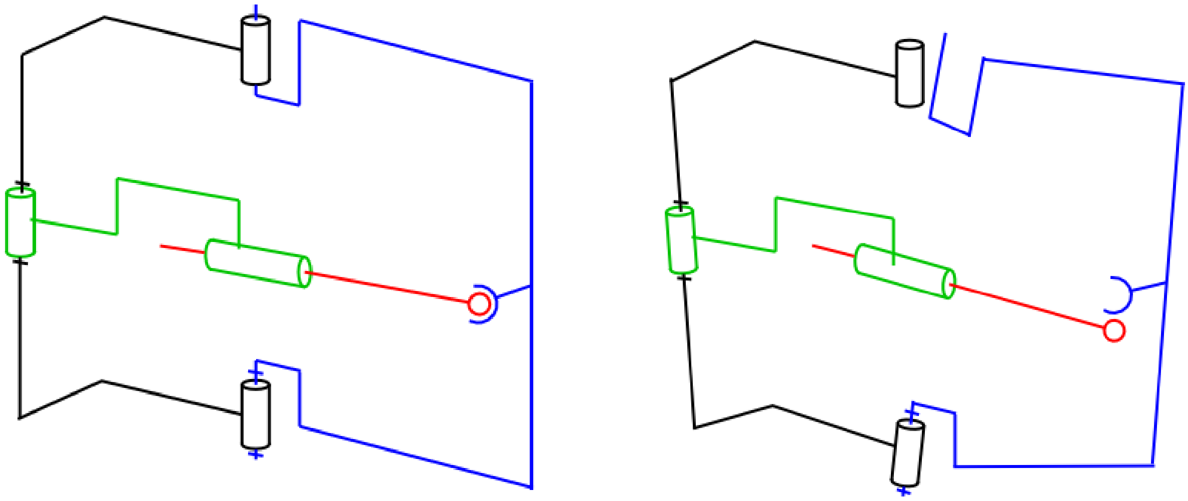
Q4 : Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce modèle **en posant les équations cinématiques** en étudiant les différentes fermetures de chaînes cinématiques.

Q5 : Déterminer le degré d'hyperstatisme **en posant les équations statiques** issues du PFS aux différents solides.

Q6 : Déterminer les contraintes géométriques d'alignement lors de l'assemblage.

Q7 : Modifier le schéma cinématique pour rendre le modèle isostatique.

Contraintes géométriques d'alignement lors de l'assemblage



Solutions pour obtenir un modèle isostatique