

2_ Modélisation des SLCI

Compétences attendues :

- ✓ Identifier la structure d'un système asservi.
- ✓ Etablir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
- ✓ Modéliser un système par schéma-blocs.
- ✓ Simplifier un modèle.

1. Notion de modélisation

1.1. Définition générale et buts

Définition de la modélisation :

La **modélisation** est la conception d'un modèle théorique.

Le but de la modélisation est de **fournir une image ou représentation d'un phénomène réel.**

S'il est possible, à partir de la représentation, de retrouver parfaitement le phénomène réel dans son évolution, il y a isomorphisme. Il est évident que ce cas extrême n'est jamais réalisé. Dans le cas général, il y a **dégradation du réel** et ainsi simplement homomorphisme.

1.2. Intérêt en Sciences industrielles pour l'ingénieur

En Sciences industrielles pour l'ingénieur, il est nécessaire de disposer de modèles, que ce soit pour prévoir le comportement d'un système, simuler un processus dangereux, coûteux ou bien difficile et long à mettre en œuvre, ou encore pour faire du dimensionnement. Grâce aux études faites à partir des modèles, il sera possible d'innover ou d'apporter des modifications au système.

Les systèmes du domaine technique étant complexes, on est conduit à élaborer des modèles destinés à les représenter de manière simplifiée et sélective. Généralement, on fait plusieurs modèles d'un même système à l'aide de méthodes et d'outils de représentation différents.

Remarque: Un modèle n'est pas une représentation fonctionnelle du système mais un outil permettant d'estimer et de prévoir le comportement d'un système.

Une modélisation est (presque) toujours une représentation altérée du système réel. Il est par conséquent indispensable de **valider expérimentalement** les résultats obtenus par une modélisation.

1.3. Cas de l'automatique

Afin de **prévoir le comportement d'un système**, il faut être capable de proposer une modélisation de celui-ci, permettant ainsi d'obtenir directement un lien entre les entrées et les sorties du système.

Pour cela, il est nécessaire de procéder en trois étapes :

- isoler le système à modéliser en positionnant la frontière avec le milieu extérieur ;
- effectuer une décomposition en sous-systèmes plus facilement exploitables ;
- établir un modèle de comportement pertinent pour chaque sous-système.

On distingue deux types de modèles :

- **le modèle de connaissance**, qui est un modèle obtenu à partir de lois physiques ;
- **le modèle de comportement**, qui est identifié à partir de résultats expérimentaux.

2. Les Systèmes Linéaires Continus Invariants (SLCI)

Un système est représenté sous la forme d'un bloc pour lequel les entrées (ou causes) du système sont situées à gauche et les sorties (effets) sont situées à droite. L'intérieur du bloc contient une description du système étudié.

On ne s'intéresse ici qu'aux systèmes **mono-variables**, c'est à dire aux systèmes qui ne possèdent **qu'une seule entrée et qu'une seule sortie**.



Figure 1 : Représentation d'un système mono-variable

Remarques :

- Les systèmes complexes possèdent en général plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties. On choisit dans ce cas comme unique sortie celle qui est la plus intéressante du point de vue de l'étude à mener ; et comme entrée la commande que doit suivre la sortie choisie. Les entrées secondaires sont alors vues comme des perturbations, car elles perturbent la relation entre l'entrée et la sortie et peuvent nuire au fonctionnement du système.
- Un système complexe peut, la plupart du temps, être décomposé en sous-systèmes mono-variables. Dans ce cas, on le représentera par un certain nombre de blocs en série, traduisant une cascade de relations de cause à effet.

2.1. Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire :

Un **système** est dit **linéaire** si la **fonction** qui le décrit est elle-même **linéaire**. Cette fonction vérifie alors les **principes de proportionnalité et de superposition**.

L'hypothèse de linéarité, relative au comportement des systèmes, traduit simplement que **l'effet est proportionnel à la cause**.

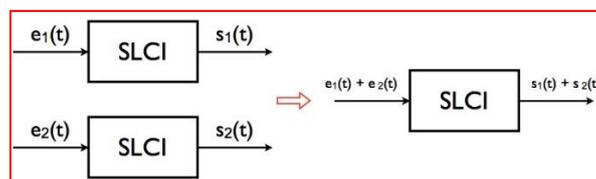
2.1.1. Proportionnalité

Soit λ un réel. Alors, si la réponse correspondant à une entrée $e(t)$ est $s(t)$, la réponse correspondant à $\lambda.e(t)$ est $\lambda.s(t)$.



2.1.2. Principe de superposition

Soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les réponses respectives aux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors la réponse à l'entrée $e_3(t) = e_1(t) + e_2(t)$ donnée par un système linéaire est $s_3(t) = s_1(t) + s_2(t)$.



Remarque : En étudiant les **réponses du système pour des entrées simples** (comme les signaux tests), et en utilisant les **propriétés de linéarité** (proportionnalité et superposition), il est alors possible d'obtenir la **réponse du système à des signaux plus complexes**.

2.1.3. Non-linéarité

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'application. Il est parfois possible d'approcher leur comportement sur une partie de leur **zone de fonctionnement** par un modèle linéaire. L'intérêt de cette hypothèse est la simplification des équations de modélisation. Le système ainsi modélisé est alors appelé **système linéarisé**.

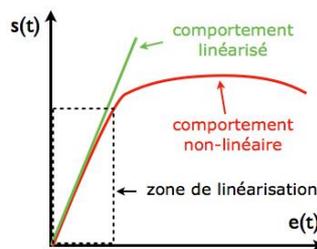


Figure 2 : Exemple de linéarisation

Exemples de non-linéarités classiques :

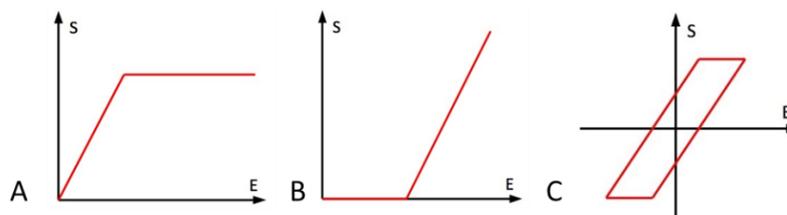


Figure 3 : A. Saturation : butée mécanique, alimentation, moteur électrique. B. Seuil : frottement. C. Hystérésis : jeux mécaniques, matériaux, cycles magnétiques

2.2. Systèmes continus

Définition d'un système continu :

Un **système est continu**, par opposition à un système discret, lorsque **les variations de ses grandeurs physiques sont définies à chaque instant** (elles sont caractérisées par des fonctions continues). On parle aussi de **système analogique**.

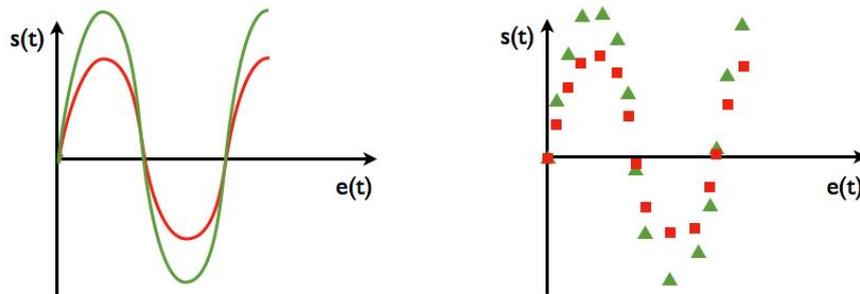


Figure 4 : Systèmes continus et systèmes discrets

La plupart des systèmes physiques, d'un point de vue macroscopique, sont continus. Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée, le plus souvent, par des systèmes informatiques, ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. On parle dans ce cas de **systèmes échantillonnés ou discrets**.

2.3. Systèmes invariants

Définition d'un système invariant :

Un **système est dit invariant** quand **ses caractéristiques** (masse, dimensions, résistance, impédance, etc.) **ne varient pas au cours du temps**.

Ainsi, pour un système invariant, si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$, alors $s(t-t_1)$ est la réponse à $e(t-t_1)$.

2.4. Exemples de SLCI



Figure 5 : A. Ressort : déplacement --> force. B. Potentiomètre : rotation --> tension. C. Engrenage : vitesse d'entrée --> vitesse de sortie

3. Modélisation des SLCI

Les systèmes réels possèdent pour la plupart des propriétés qui ne les placent pas dans la famille des SLCI.

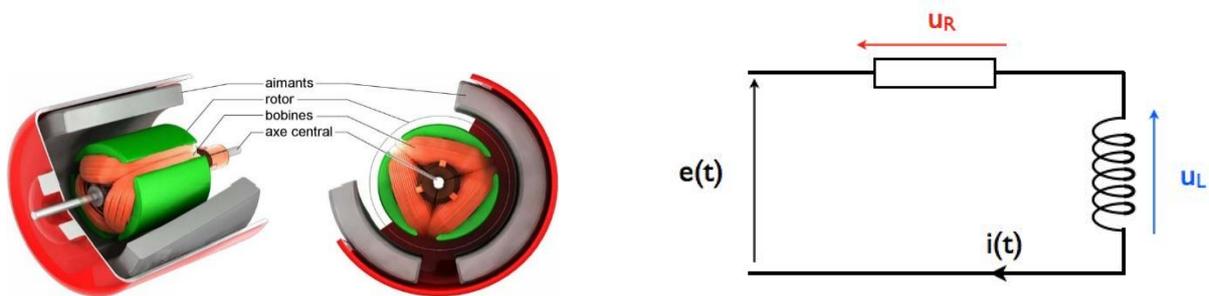
Néanmoins, sous certaines hypothèses, nombre d'entre eux peuvent être considérés comme linéaires, continus et invariants dans une zone de fonctionnement (c'est-à-dire autour d'un point de fonctionnement). Seule la comparaison du modèle théorique sous hypothèses (linéarité, continuité et invariance) avec la réalité peut permettre de valider ou non les hypothèses.

La plupart des modèles entrant dans le cadre des SLCI sont représentables par des équations différentielles à coefficients constants liant la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie.

Dans le cadre des CPGE, seuls deux modèles fondamentaux seront étudiés en détails : les systèmes du premier ordre et les systèmes du second ordre.

3.1. Systèmes du premier ordre

Prenons l'exemple d'un circuit RL, constitué d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L, couramment utilisé dans les circuits électriques. On supposera la bobine parfaite ($r = 0$).



Les équations électriques nous donnent :

$$e(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \text{ et } u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$\text{Donc } e(t) = u_R(t) + \frac{L}{R} \frac{du_R(t)}{dt}$$

On pose $\tau = \frac{L}{R}$ appelée constante de temps du système (τ en secondes), en prenant $u_R(t)$ comme sortie du système et $e(t)$ comme entrée.

Définition : La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du premier ordre est :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Avec τ **la constante de temps du système** (exprimée en **secondes**) et **K le gain** du système.

3.2. Systèmes du second ordre

Prenons maintenant l'exemple du système d'amortissement d'un VTT. On considère alors pour notre étude le mouvement de la roue par rapport au cadre du VTT, tous deux liés par l'intermédiaire d'un système composé d'un ressort et d'un amortisseur.

Ce système peut être modélisé simplement par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur montés en parallèle, la masse étant le modèle associé à l'ensemble cadre + cycliste.

On pose $\overrightarrow{F}(t)$ l'effort appliqué sur la masse M, et $x(t)$ le déplacement de la masse M (on choisit pour simplifier les équations l'origine de x telle que pour $x = 0$, le ressort soit libre).

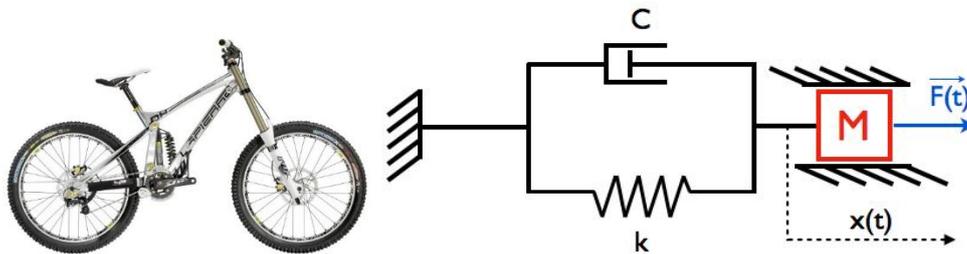


Figure 6 : VTT suspendu et modèle adopté

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à la masse M dans le repère lié au sol, sous les sollicitations dues au ressort (effort $-k.x(t)$ selon \vec{x}), à l'amortisseur (effort $-C.x'(t)$ selon \vec{x}) et à la force $F(t)$, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{C}{M} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{M} x(t) = \frac{F(t)}{M}$$

On pose alors :

$$\frac{k}{M} = \omega_0^2, \quad \frac{C}{M} = 2z\omega_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{M} = K\omega_0^2$$

Définition : La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système d'ordre 2 est :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 F(t)$$

Avec :

- ω_0 la **pulsation propre non amortie du système** exprimé en rad.s^{-1} ;
- z le **coefficient d'amortissement du système** (sans unité), ou encore noté m ou ξ ;
- K le **gain du système** (unité $\frac{[s]}{[e]}$).

3.3. Généralisation

Définition : D'une manière générale, un système linéaire continu asservi peut être représenté par une équation linéaire à coefficients constants de la forme :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e(t)$$

n est appelé **ordre du système**.

La solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants est la somme de deux contributions :

- la solution générale de l'équation sans second membre appelée **réponse libre** ; elle caractérise le **régime transitoire** et est indépendante de l'excitation à laquelle le système est soumis ;
- la solution particulière de l'équation avec second membre appelée **réponse forcée** ; elle caractérise le **régime permanent**.

Il devient cependant délicat de résoudre directement des équations d'ordre élevé. **L'outil mathématique utilisé en sciences industrielles** pour résoudre de tels systèmes différentiels est la **transformée de Laplace**.

4. Transformée de Laplace

Afin de simplifier la résolution des équations différentielles représentatives des **SLCI**, on utilise la transformée de Laplace qui **permet d'accéder à la réponse temporelle donnée par le système**, et ce **quel que soit l'ordre des équations différentielles** qui le régissent.

4.1. Définitions

Définition : Soit $f(t)$ une fonction intégralement intégrable. On définit la **transformée de Laplace** de $f(t)$ notée $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ par :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad \forall t > 0$$

Dans la pratique, on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions causales, c'est-à-dire telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques : intensité, température, effort, vitesse ...

Dans les cas rencontrés en sciences industrielles, les fonctions utilisées sont toutes localement intégrables et donc transformables dans le domaine de Laplace.

Définition : On dit qu'une fonction du temps $f(t)$ vérifie **les conditions d'Heaviside** si elle vérifie :

$$f(0^+) = 0, f'(0^+) = 0, f''(0^+) = 0 \dots$$

C'est-à-dire **si toutes les conditions initiales sont nulles**.

4.2. Propriétés des transformées de Laplace

4.2.1. Unicité

Définition de l'unicité :

- A une fonction $f(t)$ correspond une transformée $F(p)$ unique ($F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$)
- A une transformée $F(p)$ correspond une fonction $f(t)$ unique ($f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$)

4.2.2. Linéarité

Définition de la linéarité :

Soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$ deux fonctions localement intégrables. Soient $F_1(p)$ et $F_2(p)$ les transformées de Laplace respectivement de $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Soient a et b deux constantes, alors :

$$\mathcal{L}[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)] = a \cdot \mathcal{L}[f_1(t)] + b \cdot \mathcal{L}[f_2(t)] = a \cdot F_1(p) + b \cdot F_2(p)$$

4.2.3. Théorème du retard

Définition du retard :

$$\mathcal{L}[f(t - t_1)] = e^{-pt_1} \cdot \mathcal{L}[f(t)] = e^{-pt_1} \cdot F(p)$$

4.2.4. Transformée d'une dérivée

Pour la dérivée première on a :

Définition :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p \cdot F(p) - f(0^+)$$

Pour la dérivée seconde, on a :

Définition :

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^+) - \frac{df(0^+)}{dt}$$

Si les conditions initiales sont nulles, on obtient directement :

Définition :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n \cdot \mathcal{L}[f(t)] = p^n \cdot F(p)$$

Dans les conditions de Heaviside, **dériver par rapport au temps** dans le domaine temporel est **équivalent à multiplier par p** dans le domaine symbolique de Laplace.

4.2.5. Transformée d'une intégrale

Définition : Soit $g(t)$ une primitive de $f(t)$. Alors :

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(u) du \right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

Si les conditions initiales sont nulles, **intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.**

Exemple :

Pour le passage de la donnée d'une vitesse à une position (intégration), on a (pour des conditions initiales nulles) :

- Dans le domaine temporel : $x(t) = \int_{u=0}^{u=t} v(u) du$
- Dans le domaine de Laplace : $X(p) = \frac{1}{p} \cdot V(p)$

Tableau récapitulatif

	Addition	Multiplication par un scalaire	Multiplication de deux fonctions	Dérivation 1 ^{ère}	Dérivation 2 nd e	Intégration (avec CI nulles)	Retard
f(t)	$f(t) + g(t)$	$K.f(t)$	$f(t).g(t)$	$f'(t)$	$f''(t)$	$\int_0^t f(x) dx$	$f(t-x)$
F(p)	$F(p) + G(p)$	$K.F(p)$	$F(p).G(p)$	$p.F(p) - f(0^+)$	$p^2.F(p) - p.f(0^+) - f'(0^+)$	$\frac{F(p)}{p}$	$e^{-x.p} . F(p)$

4.3. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Connaissant $F(p)$, il est possible d'obtenir des informations sur certaines valeurs de $f(t)$ (ses valeurs à $t=0$ et à $t=\infty$) sans avoir à calculer la transformée inverse de $F(p)$.

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p)$$

Ces deux résultats n'ont de sens que si la limite existe... En particulier, le théorème de la valeur finale ne s'applique qu'aux systèmes stables ; il ne permet pas de montrer la stabilité d'un système.

Les transformées de Laplace sont utilisées en sciences industrielles pour l'étude des systèmes asservis. La modélisation d'un système donné se traduit généralement par une équation différentielle à coefficients constants reliant la grandeur d'entrée (notée symboliquement $e(t)$) et la grandeur de sortie ($s(t)$). C'est la résolution d'un tel système qui pose problème, de par la complexité de résolution directe des équations pour des ordres élevés (supérieurs à 2).

La **transformée de Laplace** est donc un **outil mathématique** qui permet la **résolution de tels systèmes**.

On peut résumer l'utilisation des transformées de Laplace par le diagramme suivant :

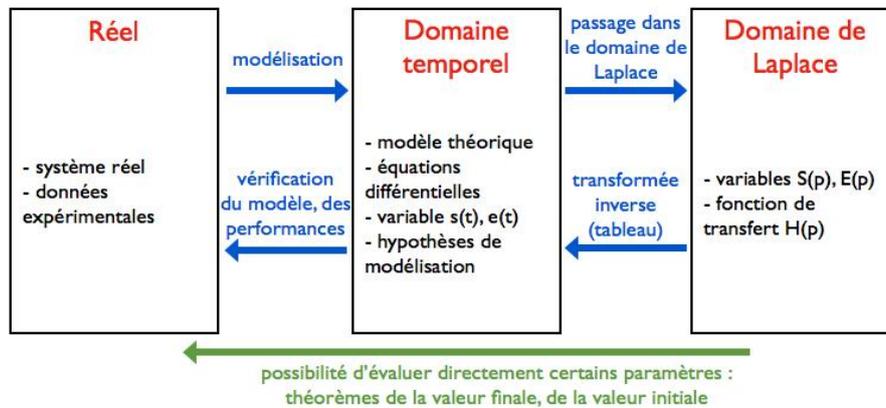


Figure 7 : Utilisation des transformées de Laplace

5. Fonction de transfert d'un système

5.1. Définitions

On considère un SLCI régité par une équation différentielle du type :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e(t)$$

On se place dans le cas de **conditions initiales nulles** (conditions de Heaviside).

En réalité, le niveau initial du système importe peu, c'est sa réaction à une perturbation à partir d'un état stable que l'on souhaite étudier. On peut donc toujours se ramener à des conditions initiales nulles avec un changement d'origine.

Dans le **domaine de Laplace**, d'après le **théorème de la dérivée**, l'équation différentielle qui régite le système devient :

$$a_n p^n S(p) + a_{n-1} p^{n-1} S(p) + \dots + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + b_{m-1} p^{m-1} E(p) + \dots + b_0 E(p)$$

Définition : On appelle **fonction de transfert du système** (ou transmittance) le rapport entre la sortie et l'entrée du système dans le domaine symbolique (ou de **Laplace**). On le note H(p).

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

Définition : La **forme canonique de la fonction de transfert** s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K (1 + \dots + \check{b}_m p^m)}{p^\alpha (1 + \dots + \check{\alpha}_n p^n)}$$

Avec $n = n' + \alpha$ l'**ordre du système**, α la **classe du système** et **K** le **gain** (caractérisé de statique lorsque la classe du système est nulle).

Cette forme est fondamentale et permet de nombreuses analyses pratiques (analyses temporelle, fréquentielle, dimensionnelle).

Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie s'écrit donc : $S(p) = H(p).E(p)$

La fonction de transfert représente le comportement du système et s'exprime simplement comme le rapport de deux polynômes en p (fraction rationnelle) construits à partir des coefficients de l'équation différentielle régissant son évolution. En explicitant les racines (éventuellement complexes) de ces polynômes, on peut réécrire $H(p)$ sous une seconde forme canonique.

Définition : La **seconde forme canonique de la fonction de transfert** obtenue en déterminant les racines (complexes ou non) des numérateur et dénominateur s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K (p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{p^\alpha (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

Où les z_i sont **les zéros** et les p_i **les pôles** de la fonction transfert.

5.2. Exemples de fonctions de transfert

5.2.1. Circuit RL

D'après l'exemple du paragraphe précédent, un circuit RL est régi par l'équation suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

Avec des conditions initiales nulles, nous obtenons donc dans le domaine de **Laplace**.

$$\tau.p.S(p) + S(p) = K.E(p) \text{ donc } (\tau.p + 1).S(p) = K.E(p)$$

Soit

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Définition :

La **fonction de transfert caractéristique d'un système du premier ordre** a pour forme caractéristique suivante :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Où

- K est appelé gain statique du système (**unité $\frac{[s]}{[e]}$**)
- τ est appelé constante de temps du système (en **secondes**)

5.2.2. Système masse-ressort

D'après l'exemple du VTT, un système masse-ressort est régi par l'équation suivante :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

Avec les conditions initiales nulles, nous obtenons donc dans le domaine de **Laplace**.

$$p^2 S(p) + 2z\omega_0 p S(p) + \omega_0^2 S(p) = K\omega_0^2 E(p)$$

Donc

$$(p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2) S(p) = K\omega_0^2 E(p)$$

Soit

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Où :

- K est appelé gain statique du système (**unité $\frac{[s]}{[e]}$**)
- ω_0 est appelé pulsation propre du système (en **rad.s⁻¹**)
- z est appelé coefficient d'amortissement du système (**sans unité**)

Remarque : $E(p)$ est la transformée de Laplace du signal d'entrée du système. Si on veut connaître la réponse indicielle du système, la transformée d'un échelon unitaire étant $\frac{1}{p}$, on aura simplement à étudier la sortie $S(p) = H(p).E(p) = H(p). \frac{1}{p}$

5.3. Tableau des transformées usuelles

Pour utiliser la transformée de Laplace, on ne recalcule pas les fonctions, on utilise le tableau récapitulatif (cf. dernière page). L'utilisation de la fonction échelon permet de travailler dans \mathbb{R}^+ et ainsi de pouvoir utiliser la transformée de Laplace.

Remarque : Les transformées les plus couramment utilisées (Dirac, échelon unitaire, rampe, polynôme et exponentielle) sont à connaître **par cœur**.

6. Utilisation des transformées de Laplace : Exemple

En reprenant le circuit RL, d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t) = u_R(t)$, nous avons comme modèle dans le domaine temporel :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Ce qui, avec des conditions initiales nulles, donne dans le domaine de **Laplace** :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Soit par exemple pour la réponse indicielle (réponse à un échelon unitaire de $e(t)$ de transformée de Laplace $\frac{1}{p}$) :

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{1 + \tau p} E(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

On utilise alors le tableau des transformées pour obtenir l'expression de $s(t)$ dans le domaine temporel (on fait donc une transformation de Laplace inverse) :

$$s(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$

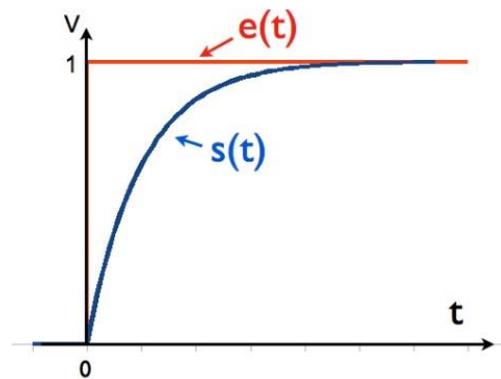


Figure 8 : Réponse temporelle du circuit RL

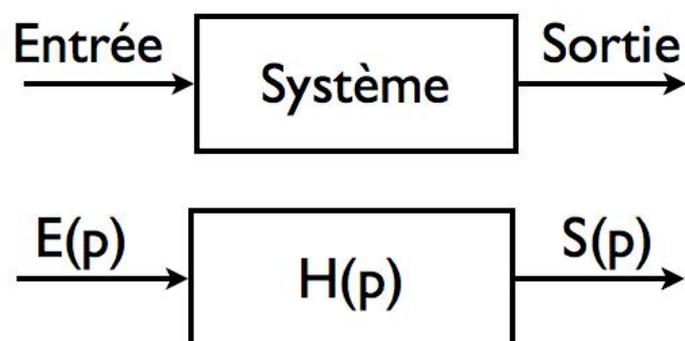
7. Représentation par schéma-blocs

Afin de simplifier la représentation et la modélisation du système, il est possible d'utiliser des **schéma-blocs**. Ceux-ci représentent la fonction de transfert du système (ou du sous-système) étudié. Ainsi, il est possible de représenter directement la structure d'un système par les fonctions de transfert des différents éléments, dans des schéma-blocs.

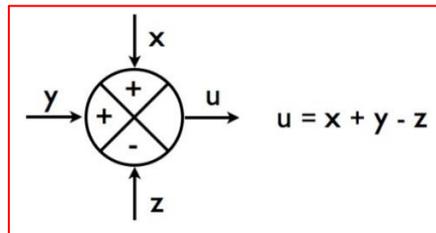
7.1. Formalisme

La représentation par schéma-blocs se fait à l'aide de 3 éléments : les **blocs**, les points de sommation, et les points de prélèvement.

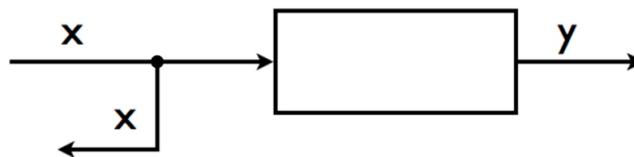
Chaque bloc se présente donc sous la forme suivante et correspond à la fonction d'un (sous-) système :



Le **point de sommation** correspond à la sommation ou à la soustraction d'une ou plusieurs grandeurs.

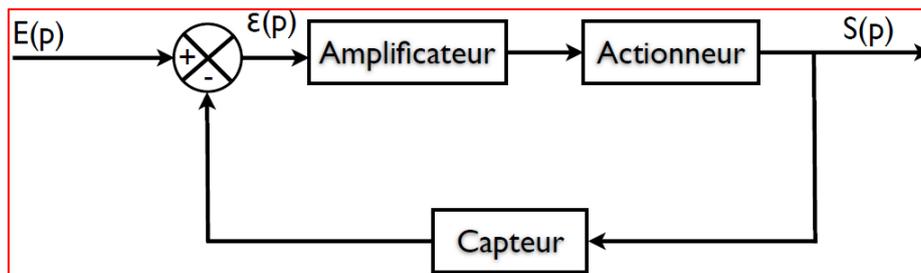


Le **point de prélèvement** sert à diriger une grandeur vers deux blocs différents :



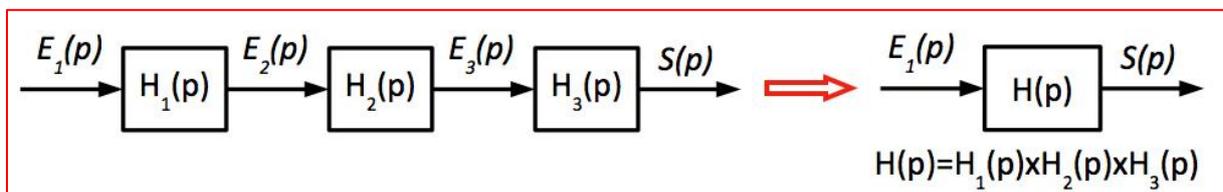
7.2. Schéma-blocs d'un système asservi

Un système asservi est un système bouclé, générateur d'écart et amplificateur.

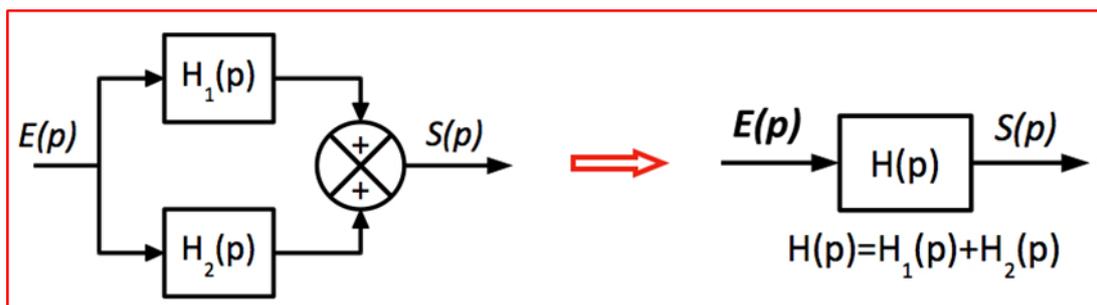


7.3. Manipulation de schéma-blocs

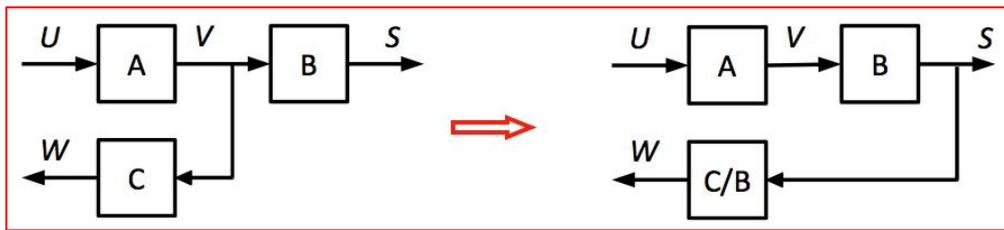
Fonctions de transfert en série



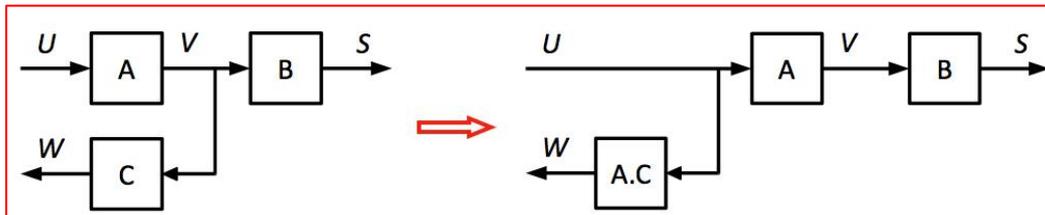
Fonctions de transfert en parallèle



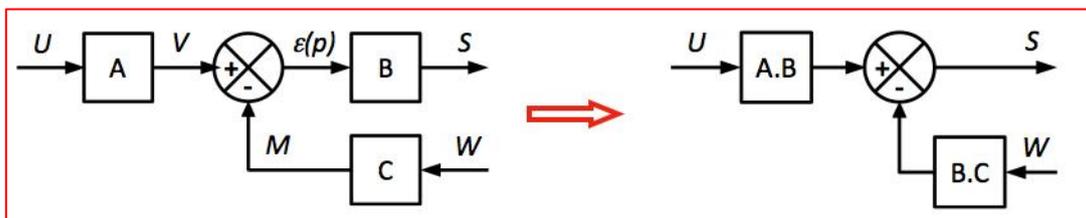
Déplacement de point de prélèvement vers l'aval



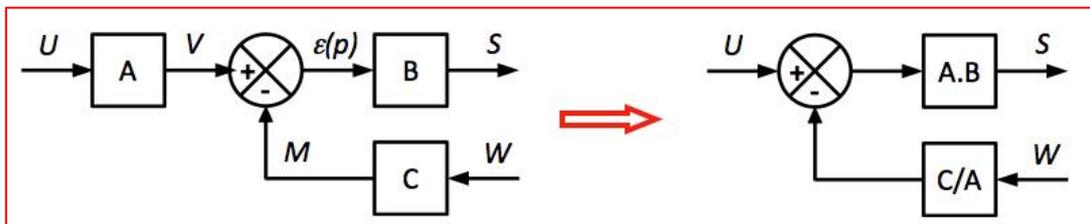
Déplacement d'un point de prélèvement vers l'amont



Déplacement de sommateur vers l'aval



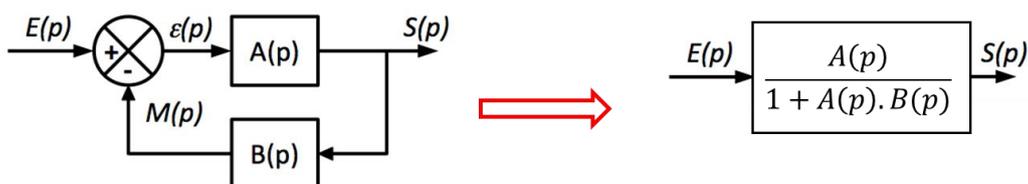
Déplacement de sommateur vers l'amont



8. Particularités

8.1. Fonction de transfert en boucle fermé (FTBF)

À l'aide des manipulations décrites dans les parties précédentes, il est généralement possible de ramener le schéma-bloc global d'un système asservi sous la forme générique suivante.



- $\epsilon(p)$ est appelé **l'écart**
- $A(p)$ correspond à la **fonction de transfert en chaîne directe**
- $B(p)$ correspond à la **chaîne de mesure ou chaîne d'information**

On a donc comme **fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)**

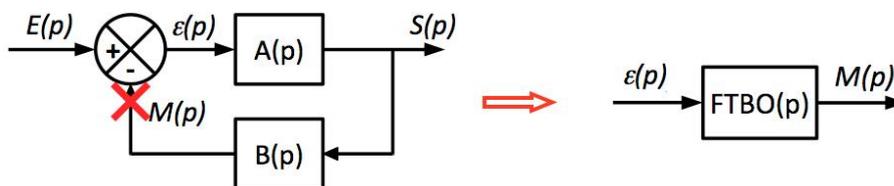
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

car $S(p) = \varepsilon(p)A(p)$ et $\varepsilon(p) = E(p) - M(p) = E(p) - B(p)S(p)$

d'où $S(p) = (E(p) - B(p)S(p))A(p)$ soit $S(p)(1 + A(p)B(p)) = E(p)A(p)$

8.2. Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

La **fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)** est définie comme la fonction de transfert du système pour laquelle le retour sur le sommateur est coupé. Elle comprend **la chaîne d'action (directe) ET la chaîne d'information (mesure)**.

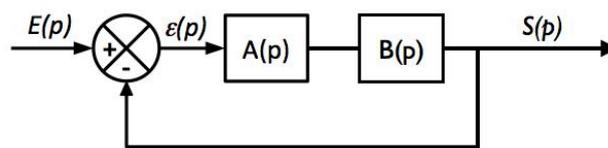


Pour déterminer la FTBO, il suffit de faire le produit des fonctions de transfert de chaque bloc de la boucle. La FTBO est utilisée pour déterminer les conditions de stabilité d'un système. On a comme expression pour la FTBO :

$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = A(p)B(p)$$

8.3. Fonction de transfert d'un système à retour unitaire

Dans ce cas, **on n'a aucune fonction de transfert sur la boucle de retour**. Pour un système à retour non unitaire, on peut aussi se ramener à un système à retour unitaire en utilisant la propriété de déplacement d'une jonction :



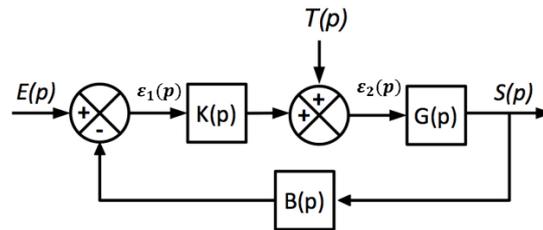
La fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

8.4. Fonction de transfert d'un système perturbé

Dans un système réel, plusieurs entrées viennent modifier la sortie. Ces entrées comprennent non seulement **l'entrée principale** (grandeur par rapport à laquelle on détermine la sortie),

mais aussi des **entrées supplémentaires** très souvent parasites (bruit, effort résistant, vent...). Le schéma-bloc d'un tel système est le suivant :



Ce schéma bloc possède deux entrées $E(p)$ et $T(p)$. Pour déterminer la fonction de transfert de ce système, on utilise le principe de superposition des SLCl. Le schéma est alors équivalent à la superposition des deux schémas suivants :

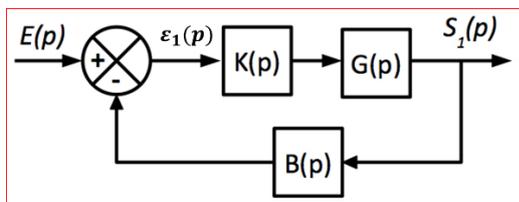


Figure 9 : Schéma-bloc où $T(p) = 0$

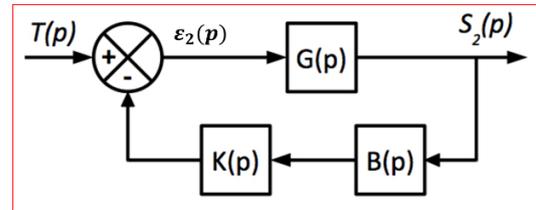


Figure 10 : Schéma-bloc où $E(p) = 0$

Nous notons donc : $S(p) = S_1(p) + S_2(p) = H_1(p)E(p) + H_2(p)T(p)$

- $H_1(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée du schéma bloc de chaîne directe $K(p).G(p)$.
- $H_2(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée du schéma bloc de chaîne directe $G(p)$.

Comme la fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit $K(p).G(p).B(p)$, nous obtenons d'après le résultat du paragraphe précédent :

$$S(p) = \frac{K(p)G(p)}{1 + FTBO} E(p) + \frac{G(p)}{1 + FTBO} T(p)$$

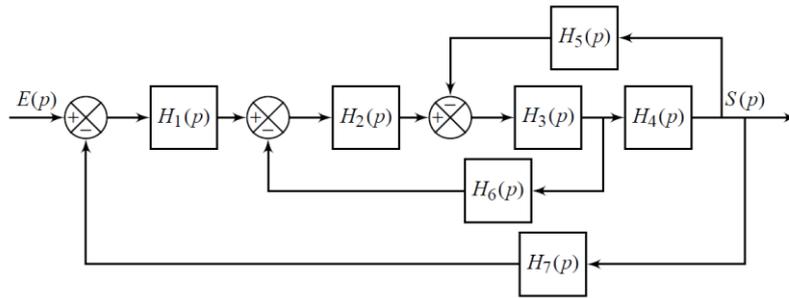
8.5. Bilan

La principale difficulté dans l'analyse d'un système automatisé est de réussir à obtenir la chaîne directe et la chaîne d'information pour pouvoir calculer les FTBO et FTBF.

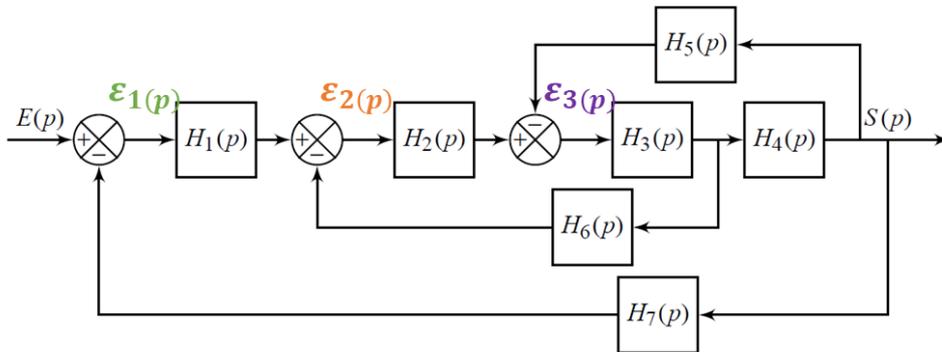
Pour déterminer la fonction de transfert d'un système complexe, deux méthodes sont possibles :

- **la méthode calculatoire :**
 - donner un nom à chaque sortie de sommateur et de jonction,
 - écrire les équations de chaque sommateur,
 - éliminer les variables pour faire apparaître uniquement l'entrée et la sortie ;
- **la méthode de manipulation de schéma-blocs :**
 - essayer de faire apparaître des sous-systèmes à boucle fermée,
 - remplacer alors chaque boucle par le bloc associé avec la fonction de transfert déterminée.

9. Méthodes de réduction de schéma-blocs



Par les équations :



$$S(p) = H_4(p).H_3(p) \cdot \left[-H_5(p).S(p) + H_2(p) \cdot \left(+H_1(p) \cdot \left[+E(p) - H_7(p).S(p) \right] - \frac{H_6(p)}{H_4(p)}.S(p) \right) \right]$$

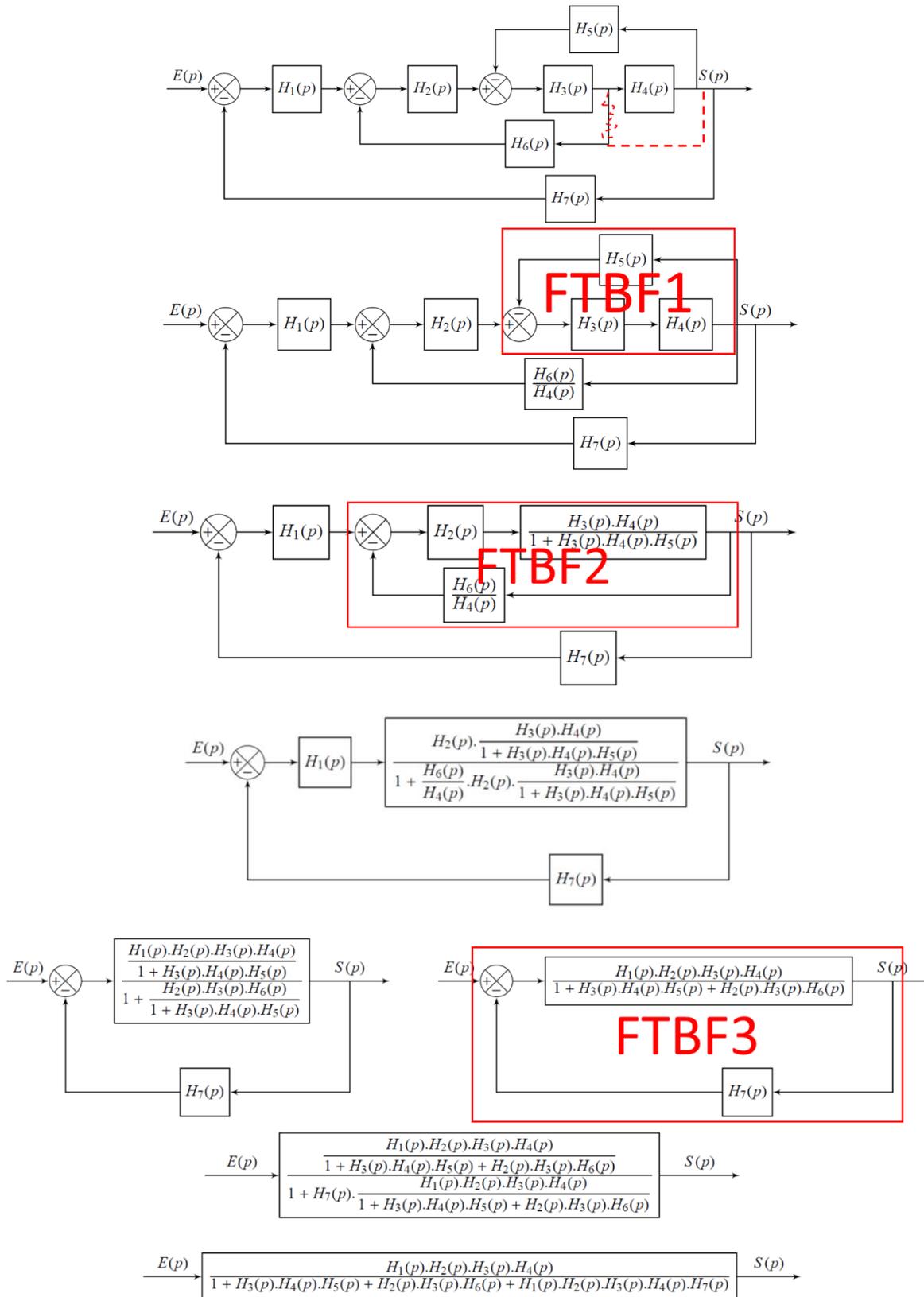
$$S(p) \cdot \left(1 + H_4(p).H_3(p) \cdot \left[H_5(p) + H_2(p) \cdot \left(H_1(p) \cdot [H_7(p)] + \frac{H_6(p)}{H_4(p)} \right) \right] \right) = H_4(p).H_3(p).H_2(p).H_1(p).E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_4(p).H_3(p).H_2(p).H_1(p)}{1 + H_4(p).H_3(p) \cdot \left[H_5(p) + H_2(p) \cdot \left(H_1(p) \cdot [H_7(p)] + \frac{H_6(p)}{H_4(p)} \right) \right]}$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_4(p).H_3(p).H_2(p).H_1(p)}{1 + H_4(p).H_3(p).H_5(p) + H_4(p).H_3(p).H_2(p).H_1(p).H_7(p) + \frac{H_6(p)}{H_4(p)} \cdot H_4(p).H_3(p).H_2(p)}$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_4(p).H_3(p).H_2(p).H_1(p)}{1 + H_4(p).H_3(p).H_5(p) + H_4(p).H_3(p).H_2(p).H_1(p).H_7(p) + H_3(p).H_2(p).H_6(p)}$$

Par réduction des schéma blocs et FTBF :



On comprend alors l'intérêt de connaître les formules de simplification de blocs par cœur (FTBF), ce qui fait gagner un temps considérable...

10. Tableau des transformées de Laplace

f(t)	F(p)
f(t-t₁)	e^{-pt₁} F(p)
δ(t)	1
u(t)	$\frac{1}{p}$
a.t.u(t)	$\frac{a}{p^2}$
e^{-at}.u(t)	$\frac{1}{p+a}$
$\frac{t^n}{n!}.u(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
t e^{-at}.u(t)	$\frac{1}{(p+a)^2}$
sin ωt . u(t)	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
cos ωt . u(t)	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$