

3_ Réponses Temporelles

Compétences attendues :

- ✓ Etablir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle. $\Leftrightarrow I$
- ✓ Déterminer la réponse temporelle. $\Leftrightarrow I$
- ✓ Simplifier un modèle.
- ✓ Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- ✓ Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
- ✓ Déterminer les performances d'un système asservi.
- ✓ Analyser un algorithme. $\Leftrightarrow I$

1. Introduction

Ce chapitre regroupe les cas classiques de réponses temporelles $s(t)$ aux signaux d'entrée usuels que sont l'impulsion de Dirac, l'échelon et la rampe des systèmes modélisables par des premier ou second ordres, des intégrateurs ou des systèmes à action proportionnelle.

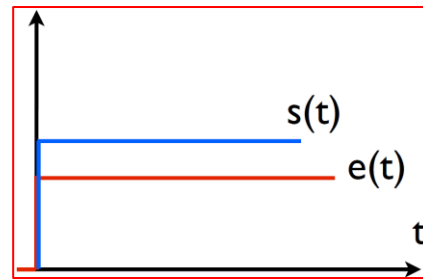
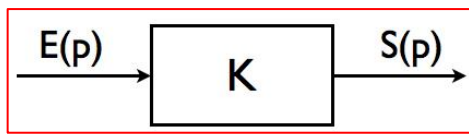
Il est intéressant de savoir reconnaître et interpréter ces résultats pour trois raisons :

- **recaler un modèle de connaissance** d'un système : à partir d'une mesure, déterminer les paramètres caractéristiques de l'équation différentielle régissant le système afin de modéliser au mieux le réel (car un modèle de connaissance est soumis à des hypothèses simplificatrices donc génératrices d'erreur) ;
- **établir un modèle de comportement** (également appelé modèle de représentation ou modèle boîte noire) d'un système complexe à partir d'une mesure. Selon l'allure de la courbe obtenue par la mesure, on fait l'hypothèse que le système suit une loi pré-établie et on identifie les valeurs caractéristiques de cette loi. Cette approche n'est envisageable qu'à condition de disposer du système à identifier, et de pouvoir observer ses réactions à certaines stimulations (signaux d'entrée usuels) ;
- **déterminer les performances** d'un système. En effet, précision, stabilité, amortissement et dépassement sont graphiquement identifiables sur la courbe de réponse temporelle.

2. Systèmes à action proportionnelle

Dans ces systèmes, la sortie est proportionnelle à l'entrée. La fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \text{ avec } K \in \mathbb{R}^+$$



3. Systèmes intégrateurs

L'équation d'un tel système dans le domaine temporel s'écrit : $\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$. On a donc comme fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

Sous les conditions d'Heaviside (conditions initiales nulles).

Exemples :

- Le volume de liquide contenu dans un réservoir, qui est l'intégrale du débit entrant ;
- La charge d'un condensateur, qui est l'intégrale du courant de charge ;
- La vitesse d'un mobile, qui est l'intégrale de son accélération ;
- La position d'un axe, qui est l'intégrale de sa vitesse.

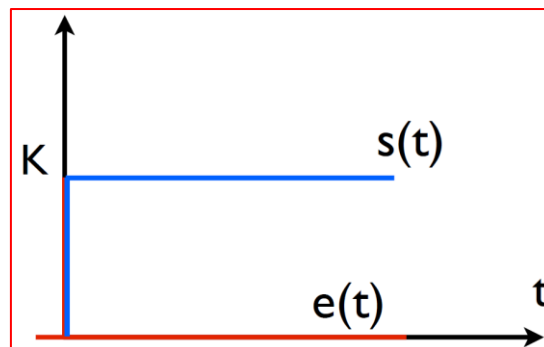
Remarque : De la même façon que les retards purs, les intégrateurs purs sont toujours associés à une autre fonction de transfert.

3.1. Réponse impulsionnelle

On soumet le système à une impulsion de Dirac ($e(t) = \delta(t)$). Dans le domaine de Laplace, on a donc $E(p) = 1$. L'expression de la sortie dans le domaine de Laplace est alors :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{p} \cdot 1$$

On a donc $s(t) = K \cdot u(t)$



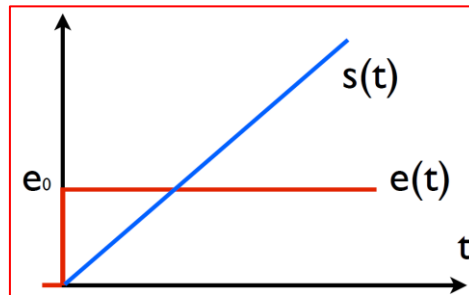
La réponse impulsionnelle d'un système intégrateur est **un échelon**.

3.2. Réponse indicielle

On soumet le système à un échelon ($e(t) = e_0 u(t)$). Dans le domaine de Laplace, on a donc $E(p) = \frac{e_0}{p}$. L'expression de la sortie dans le domaine de Laplace est donc :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{p} \cdot \frac{e_0}{p}$$

On a donc $s(t) = K \cdot e_0 \cdot t \cdot u(t)$



La réponse indicielle d'un système intégrateur est **une rampe**.

Remarque : En pratique, la grandeur de sortie ne peut augmenter indéfiniment : une vitesse est limitée par les forces centrifuges et une position par les butées de fin de course par exemple.

Pour éviter les dommages mécaniques, on fait préventivement saturer la chaîne de commande. C'est le cas de la saturation en courant (pour limiter l'accélération) et de la saturation en tension (pour limiter la vitesse) sur un axe asservi avec moteur à courant continu.

4. Systèmes du premier ordre

4.1. Rappels

Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est du 1^{er} ordre s'il est régi par une équation différentielle du 1^{er} ordre à coefficients constants :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

Avec

- K le gain statique du système
- τ la constante de temps du système

Si les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), la fonction de transfert dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$(\tau p + 1) \cdot S(p) = K \cdot E(p)$$

Soit

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

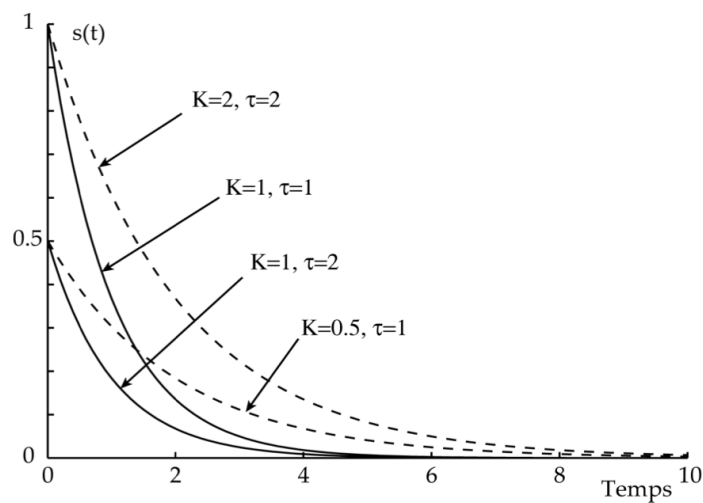
4.2. Réponse impulsionnelle

On soumet le système à une impulsion de Dirac ($e(t) = \delta(t)$). Dans le domaine de Laplace, on a donc $E(p) = 1$. L'expression de la sortie dans le domaine de Laplace est alors :

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot 1$$

On a donc comme réponse temporelle :

$$s(t) = \frac{K}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$



4.3. Réponse indicielle

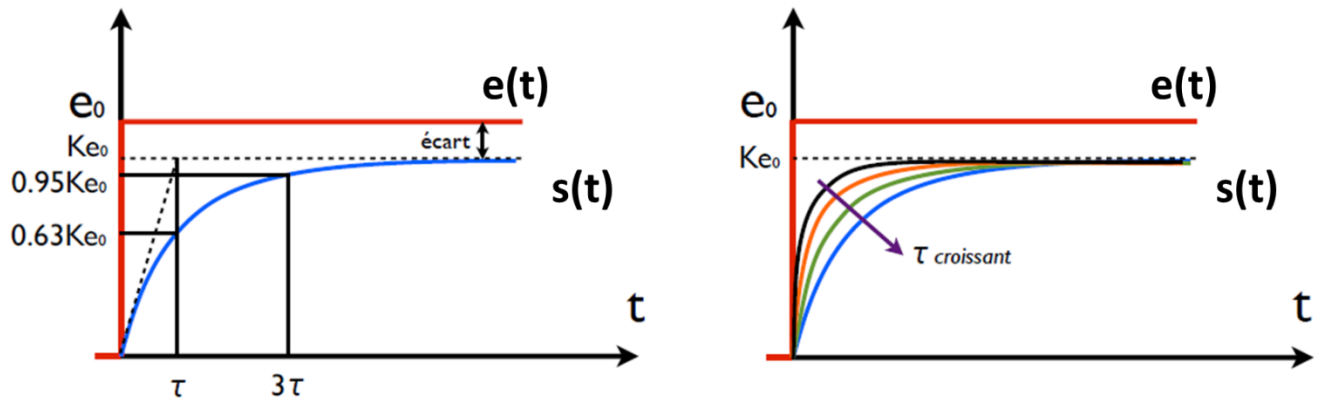
On soumet le système à un échelon ($e(t) = e_0 u(t)$). Dans le domaine de Laplace, on a donc $E(p) = \frac{e_0}{p}$. L'expression de la sortie dans le domaine de Laplace est donc :

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{e_0}{p}$$

La réponse temporelle devient :

$$s(t) = K \cdot e_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t)$$

FEUILLE ANNEXE



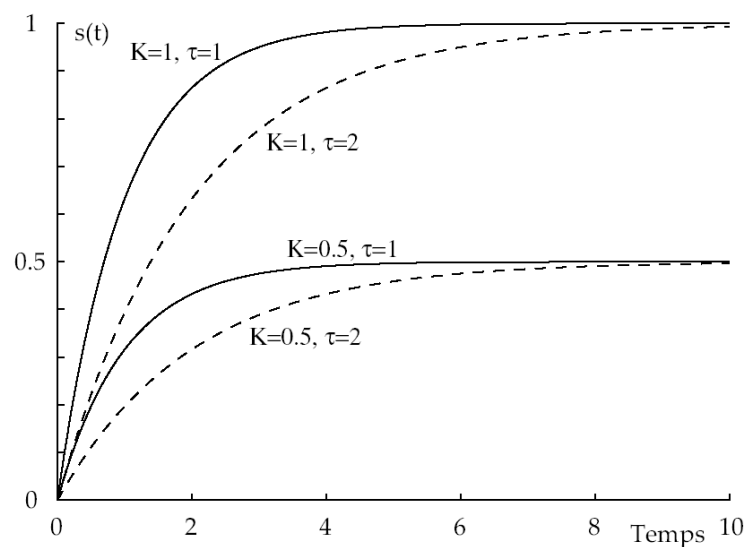
Propriétés remarquables des courbes :

- pas de dépassement
- le gain statique K caractérise le comportement du système en régime permanent :

$$s_{\infty} = K \cdot e_0$$
- pente à l'origine non nulle : $\frac{ke_0}{\tau}$
- écart statique (en utilisant le théorème de la valeur finale sur $S(p)$) : $\varepsilon_s = e_0(1 - K)$
 Le système est précis si $K=1$
- pour $t = \tau$, $s(t) = 63\% \cdot s_{\infty}$
- pour $t = 3\tau$, $s(t) \cong s(t_{5\%}) = 95\% \cdot s_{\infty}$
- plus τ est petit, plus le système est rapide

4.3.1. Influence des paramètres caractéristiques

Plus τ est faible, plus le système est rapide. Plus K est proche de 1, plus le système est précis.



4.3.2. Identification temporelle

En pratique, on cherche à modéliser un système réel par un système théorique d'ordre 1 ou 2. Pour rattacher ce modèle à la réalité, on doit identifier les différents paramètres de notre modèle à des valeurs expérimentales relevées sur le système réel. On doit donc déterminer à partir d'une courbe expérimentale les constantes de la fonction de transfert : K et τ . Pour cela, on utilise les différentes valeurs remarquables vues dans les parties précédente :

- la valeur asymptotique de la courbe qui vaut Ke_0 permet de déterminer K ;
- pour trouver τ , trois méthodes sont possibles :
 - τ correspond au temps pour lequel la sortie vaut 63% de sa valeur asymptotique,
 - la sortie atteint 95% de sa valeur asymptotique pour $t = 3\tau$,
 - la tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant $t = \tau$.

4.4. Réponse à une rampe

On a pour une entrée en rampe de pente a : $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$, la réponse :

$$S(p) = \frac{K}{1+\tau p} \cdot \frac{a}{p^2} \quad \text{et} \quad s(t) = a \cdot K \cdot \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot u(t)$$

Si $K = 1$: écart constant en régime permanent, donc l'erreur de traînage (appelé aussi écart de poursuite) $\varepsilon_v = a\tau$. La sortie suit l'entrée avec un retard τ .

Si $K \neq 1$: La réponse tend vers la droite d'équation $y = K \cdot a \cdot (t - \tau)$, dont le coefficient directeur est différent de celui de l'entrée $e(t)$. L'écart de traînage entre l'entrée et la sortie augmente en permanence lorsque $K < 1$. Lorsque $K > 1$, il s'annule pour une valeur particulière de t , puis croît indéfiniment.

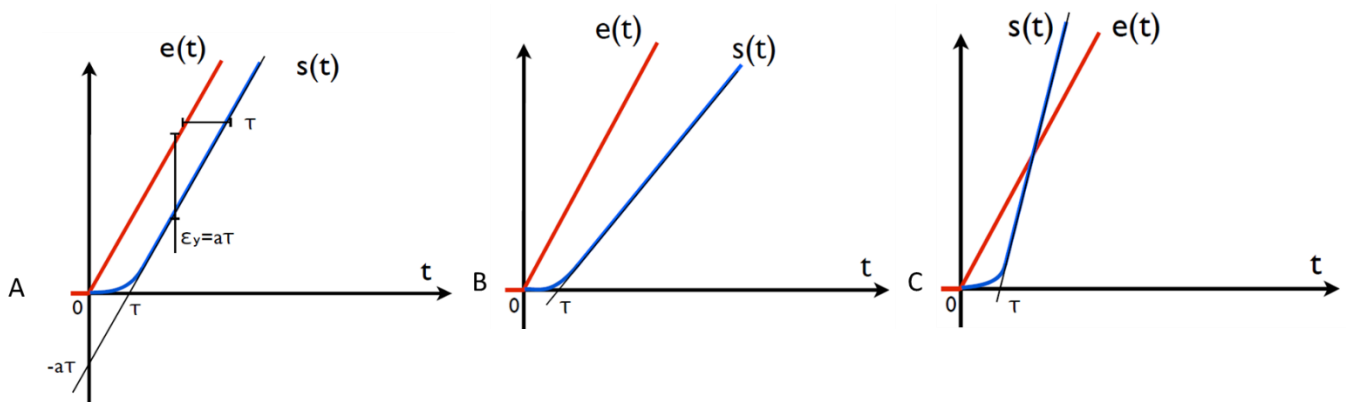


Figure 1 : A. Cas où $K = 1$. B. Cas où $K < 1$. C. Cas où $K > 1$

5. Système du deuxième ordre

5.1. Rappels

Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est du second ordre, s'il est régi par une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

Avec :

- ω_0 la pulsation propre non amortie du système ;
- z le coefficient d'amortissement du système (ou ξ) ;
- K le gain du système.

Si les conditions initiales sont nulles (conditions d'Heaviside), la fonction de transfert dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

L'étude se fait en fonction des pôles de la fonction de transfert (i.e. des racines du dénominateur). On a donc comme discriminant : $\Delta = 4\omega_0^2(z^2 - 1)$.

On a alors 3 cas possibles :

- $z > 1$: deux pôles réels : **régime apériodique**,
- $z = 1$: un pôle double : **régime apériodique critique**,
- $z < 1$: deux pôles complexes conjugués : **régime pseudo-périodique** (ou oscillant ou sous amorti).

5.2. Régime apériodique : $z > 1$

Le dénominateur de la fonction de transfert du second ordre possède alors **deux pôles réels distincts** négatifs. On a alors comme pôles :

$$p_{1,2} = \omega_0 \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right) < 0, \text{ avec } H(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

5.2.1. Réponse impulsionnelle

On peut alors écrire :

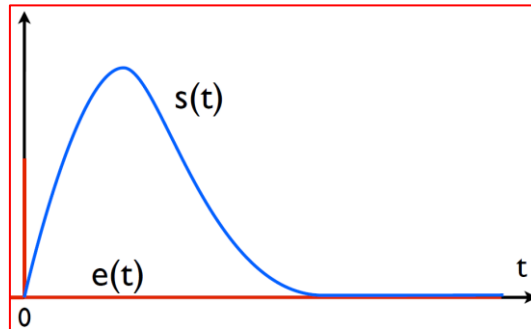
$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Qui se décompose en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} \left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right)$$

La réponse temporelle a alors pour expression :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot u(t)$$



5.2.2. Réponse indicielle

L'expression de la réponse indicielle s'écrit alors :

$$S(p) = \frac{Ke_0\omega_0^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

Qui se décompose en 3 éléments :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - p_1} + \frac{C}{p - p_2}$$

Avec $A = Ke_0$; $B = \frac{Ke_0\omega_0^2}{p_1(p_1 - p_2)}$ et $C = -\frac{Ke_0\omega_0^2}{p_2(p_1 - p_2)}$

La réponse temporelle est alors :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - \frac{\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) \right] \cdot u(t)$$

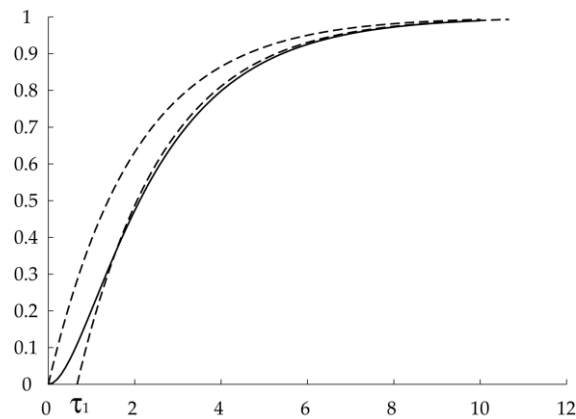
Signes particuliers du régime apériodique :

- le temps de réponse à 5% ne possède pas de formule simple ;
- lorsque l'un des pôles est très petit devant l'autre, on peut alors assimiler le système à un premier ordre.

Si $p_1 \gg p_2$, alors le pôle p_2 (inverse de la constante de temps τ_2) est dit dominant. Le système peut ainsi être assimilé à un premier ordre de constante de temps τ_2 , éventuellement retardé de la valeur de la constante de temps τ_1 :

$$s(t) \cong Ke_0 \left(1 - e^{-\frac{t - \tau_1}{\tau_2}} \right) \cdot u(t)$$

La figure montre un tel second ordre pour lequel deux approximations (en traits pointillés) ont été réalisées, la première sans retard, la seconde avec.



5.3. Régime apériodique critique : $z = 1$

On a alors dans ce cas **un pôle double** : $p_{1,2} = -z\omega_0 = -\omega_0$. La fonction de transfert peut donc s'écrire :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

5.3.1. Réponse impulsionnelle

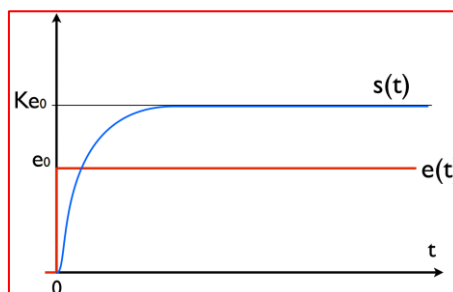
La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit donc :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2} \cdot E(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2} \text{ soit } s(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} \cdot u(t)$$

5.3.2. Réponse indicielle

La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit alors :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2} \cdot E(p) = \frac{Ke_0\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2} \text{ soit } s(t) = Ke_0(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}) \cdot u(t)$$



Signes particuliers du régime apériodique critique :

- Le temps de réponse à 5% ne possède pas de formule simple
- Il n'y a pas de dépassement

Remarques :

- La courbe possède la même allure générale que pour le cas $z > 1$, comme si l'on avait deux constantes de temps identiques.
- Ce cas n'existe pas physiquement, car on ne peut réaliser parfaitement $z = 1$.

5.4. Régime pseudo-périodique : $z < 1$

Le dénominateur de la fonction de transfert possède donc **deux pôles complexes conjugués**. On a donc :

$$p_{1,2} = \omega_0(-z \pm i\sqrt{1-z^2})$$

La fonction de transfert s'écrit alors sous la forme :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + z\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-z^2})^2}$$

5.4.1. Réponse impulsionnelle

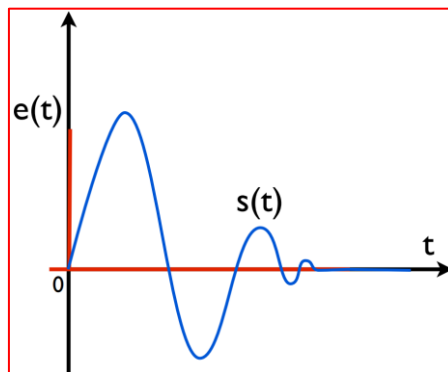
L'entrée est définie par $e(t) = \delta(t)$, soit dans le domaine de Laplace $E(p) = 1$.

La sortie a pour expression :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + z\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-z^2})^2}$$

Soit dans le domaine temporel :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 z t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-z^2} t) \cdot u(t)$$



5.4.2. Réponse indicielle

L'entrée est définie par $e(t) = e_0 u(t)$, soit dans le domaine de Laplace $E(p) = \frac{e_0}{p}$.

La sortie a pour expression :

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{(p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2)p}$$

Qui peut s'écrire, après décomposition en éléments simples :

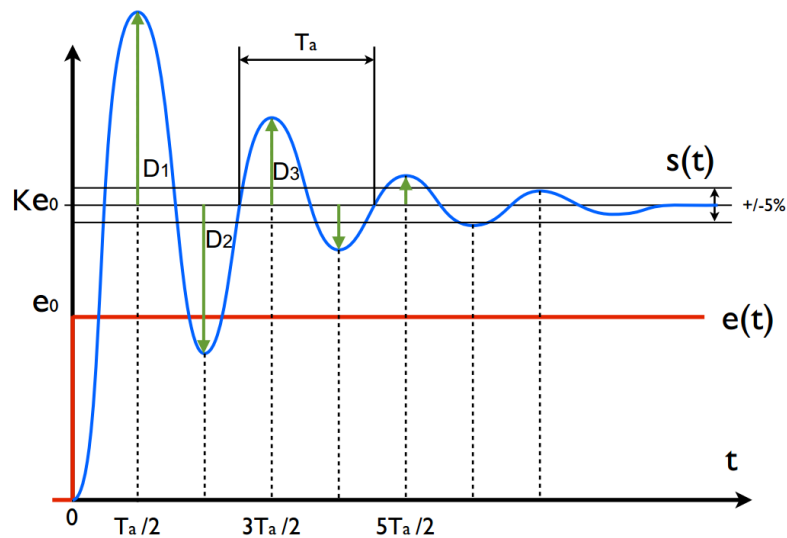
$$S(p) = Ke_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2z\omega_0}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \right) = Ke_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2z\omega_0}{(p + z\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-z^2})^2} \right)$$

On peut alors l'écrire sous la forme :

$$S(p) = Ke_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{p + z\omega_0}{(p + z\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-z^2})^2} - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\omega_0\sqrt{1-z^2}}{(p + z\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-z^2})^2} \right)$$

La réponse dans le domaine temporel s'écrit donc :

$$s(t) = Ke_0 \left[1 - e^{-\omega_0 z t} \left(\cos(\omega_0\sqrt{1-z^2}t) + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}t) \right) \right] \cdot u(t)$$



Propriétés remarquables des courbes :

- La réponse des **oscillations amorties** dont la période, appelée pseudo période est :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\pi}{\omega_a} \text{ avec } \omega_a = \omega_0\sqrt{1-z^2} \text{ la pulsation amortie}$$

- La **pente à l'origine** est nulle :

$$s'(t) = \frac{Ke_0\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_0 z t} \sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}t) \cdot u(t) \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 0^+} s'(t) = 0 \text{ donc } \textit{pente nulle}$$

- Les **dépassements relatifs** pour les instants t_k tels que $s'(t_k)=0$ ont pour valeur :

$$D_{k\%} = 100 \frac{|s(t_k) - s(+\infty)|}{|s(+\infty)|} = 100 \cdot e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Avec

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

Donc

$$s(t_k) = Ke_0(1 - (-1)^k \cdot e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}})$$

Les dépassements relatifs ne dépendent donc que du coefficient d'amortissement z . On utilise cette particularité pour identifier z à partir d'un tracé expérimental. Le premier dépassement est retenu, et on a alors :

$$D_1 = e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \text{ soit } z = \frac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}$$

Identification temporelle

La tangente à l'origine est horizontale. La valeur à convergence permet d'identifier le gain statique K . Le premier dépassement D_1 permet d'identifier le coefficient d'amortissement z tandis que le temps du premier dépassement t_1 permet d'identifier la pulsation non amortie ω_0 .

Temps du 1 ^{er} dépassement	$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$
Amplitude du 1 ^{er} dépassement	$D_{1\%} = 100 \cdot e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$
Pulsation amortie	$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1-z^2}$
Pseudo-période	$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}} = \frac{2\pi}{\omega_a}$
Coefficient d'amortissement	$z = \frac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}$

5.5. Bilan sur les réponses indicielles

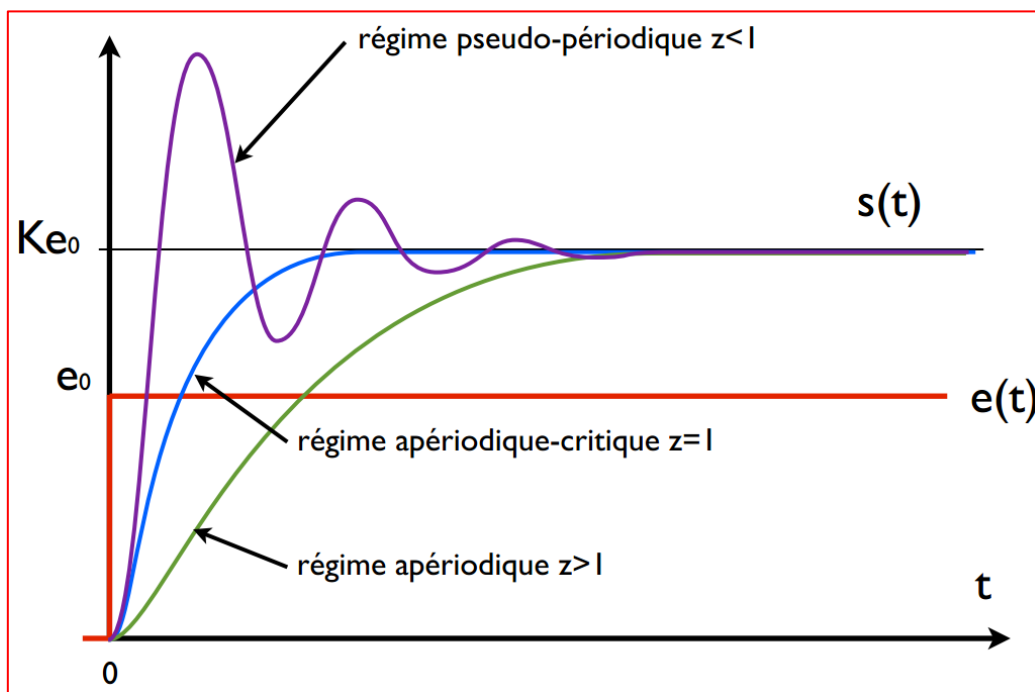


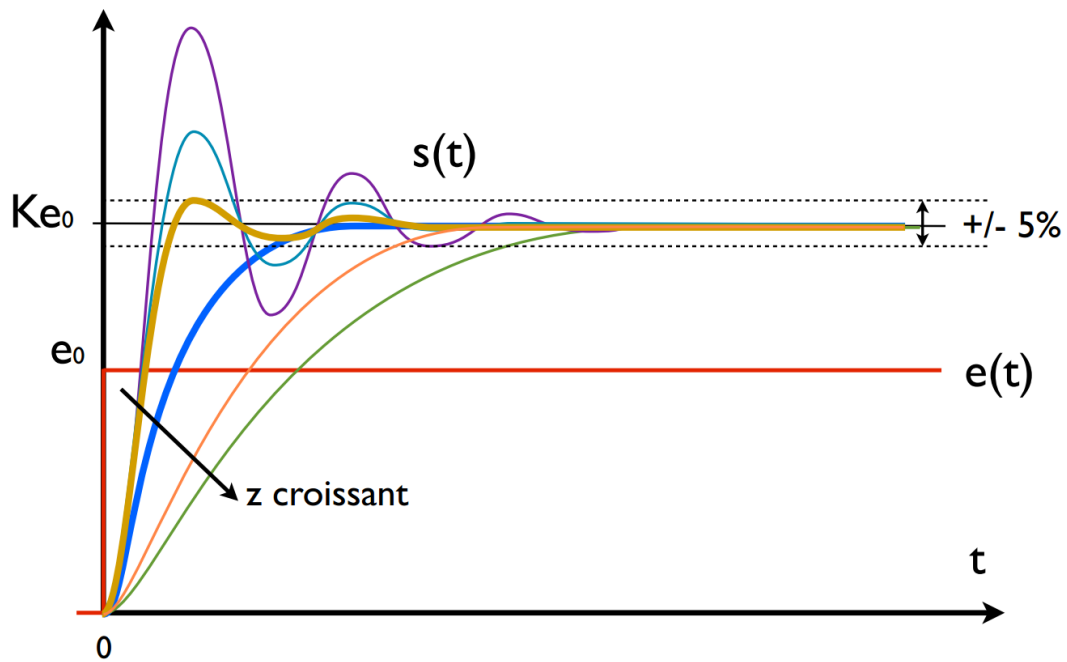
Figure 2 : Tracés des réponses indicielles pour les régimes pseudo-périodique, apériodique et apériodique critique

5.6. Influence des paramètres caractéristiques

5.6.1. Coefficient d'amortissement z (ou ξ)

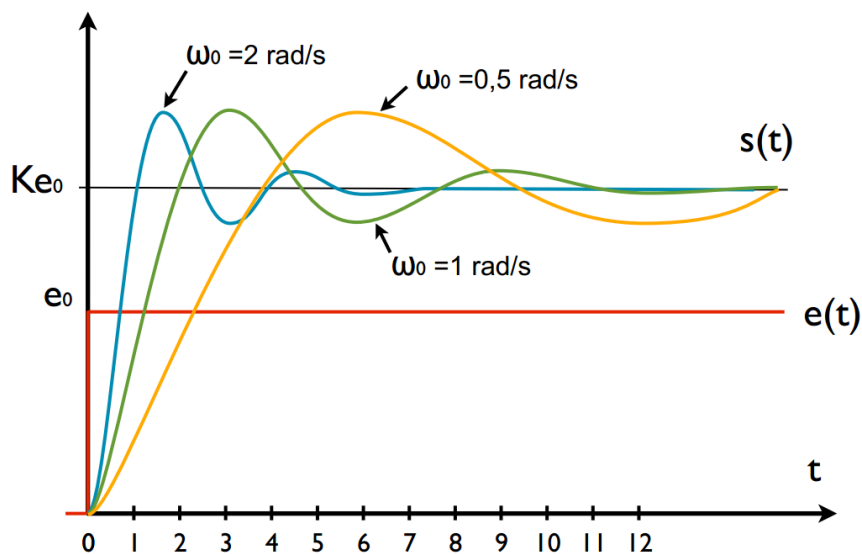
La réponse temporelle présente des dépassements pour $z < 1$ (régime pseudo-périodique). Les courbes en gras représentent les cas particuliers suivants :

- $z = 1$: réponse apériodique critique ;
- $z \approx 0,7$: réponse optimisant le temps de réponse à 5% (le premier dépassement vaut alors 5% de Ke_0).



5.6.2. Pulsation propre ω_0

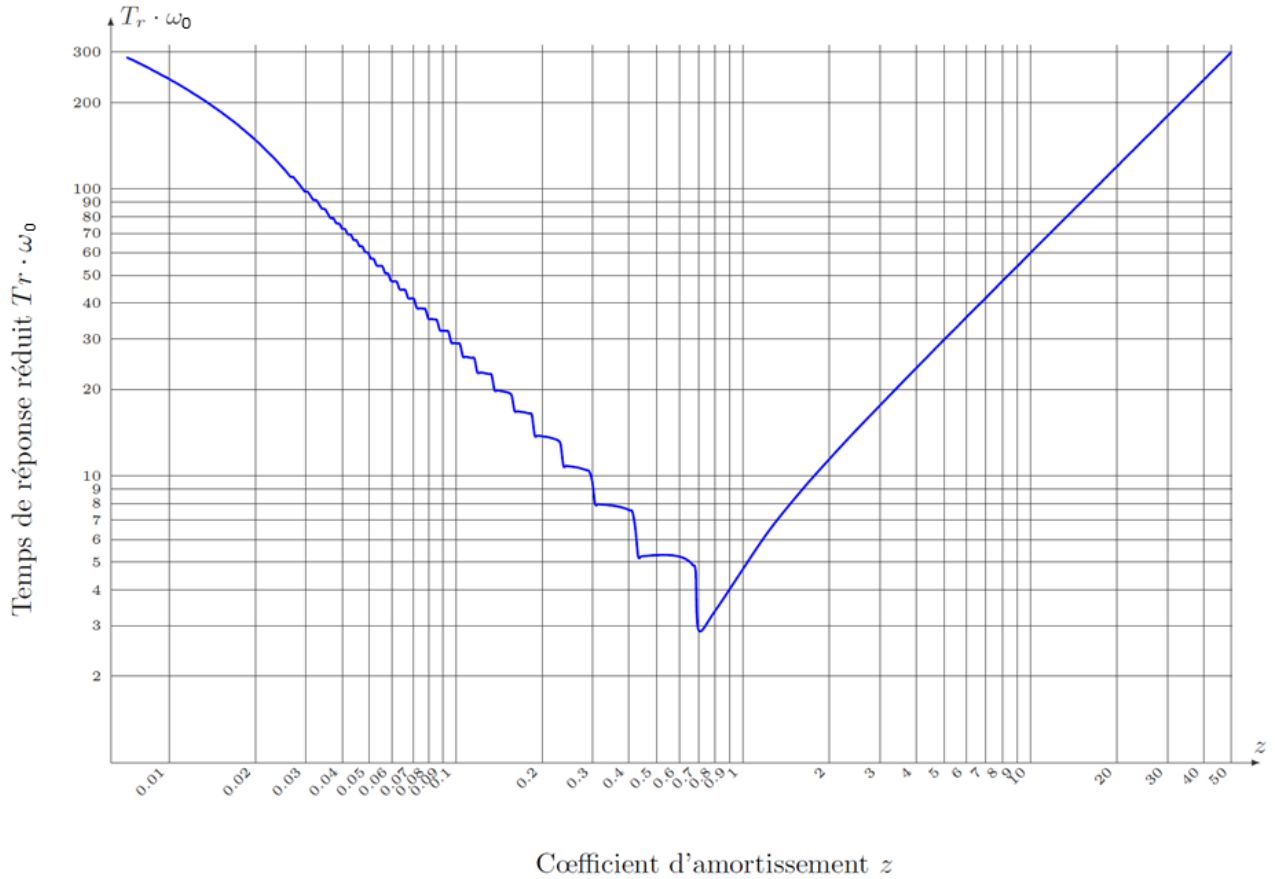
La pulsation ω_0 ne modifie pas l'amplitude des dépassements.



5.7. Détermination du temps de réponse à 5%

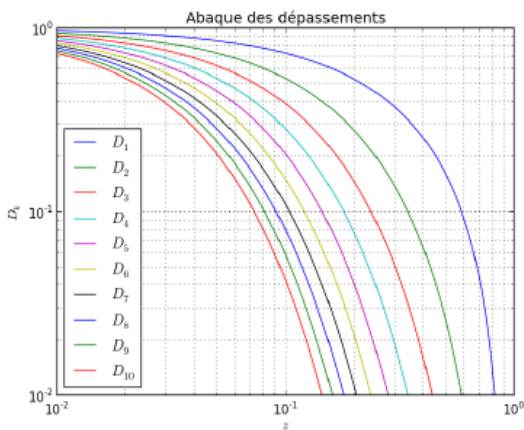
Les courbes ci-après représentent en fonction de l'amortissement z et pour une entrée en échelon :

- le temps de réponse réduit ($t_{5\%} \cdot \omega_0$) ;



Le temps de réponse minimum est atteint pour $z = 0,69$. Au-delà de $z = 1$, la courbe est régulière, car il n'y a plus de dépassement. Les bosses de la partie gauche de la courbe sont dues aux sauts d'un extremum à un autre du temps de réponse.

5.8. Abaque des dépassements en fonction de z



Les dépassements relatifs pour les instants t_k ont pour valeur :

$$D_{k\%} = 100 \frac{|s(t_k) - s(+\infty)|}{|s(+\infty)|} = 100 \cdot e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Avec

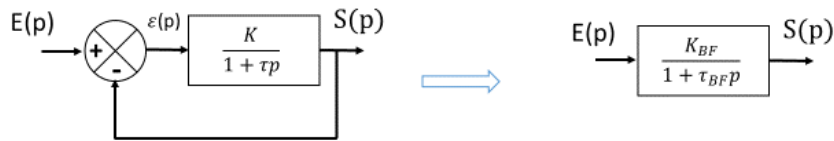
$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

Les dépassements relatifs ne dépendent donc que du coefficient d'amortissement z .

On utilise cette particularité pour identifier z à partir d'un tracé expérimental.

6. Systèmes du 1^{er} et 2nd ordre bouclés par un retour UNITAIRE

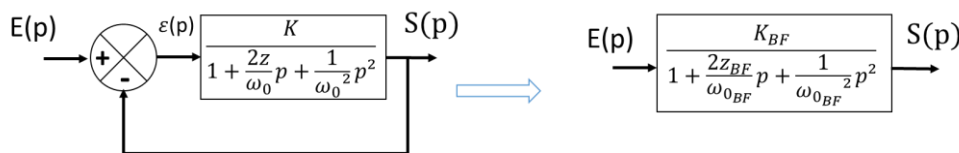
6.1. FTBF d'un système du 1^{er} ordre



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K}{1+\tau p}}{1 + \frac{K}{1+\tau p}} = \frac{K}{1+\tau p + K} = \frac{K}{1 + \frac{\tau}{1+K} p}$$

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K} < 1 \quad \tau_{BF} = \frac{\tau}{1+K} < \tau$$

6.2. FTBF d'un système du 2nd ordre



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0(1+K)} p + \frac{p^2}{\omega_0^2(1+K)}}$$

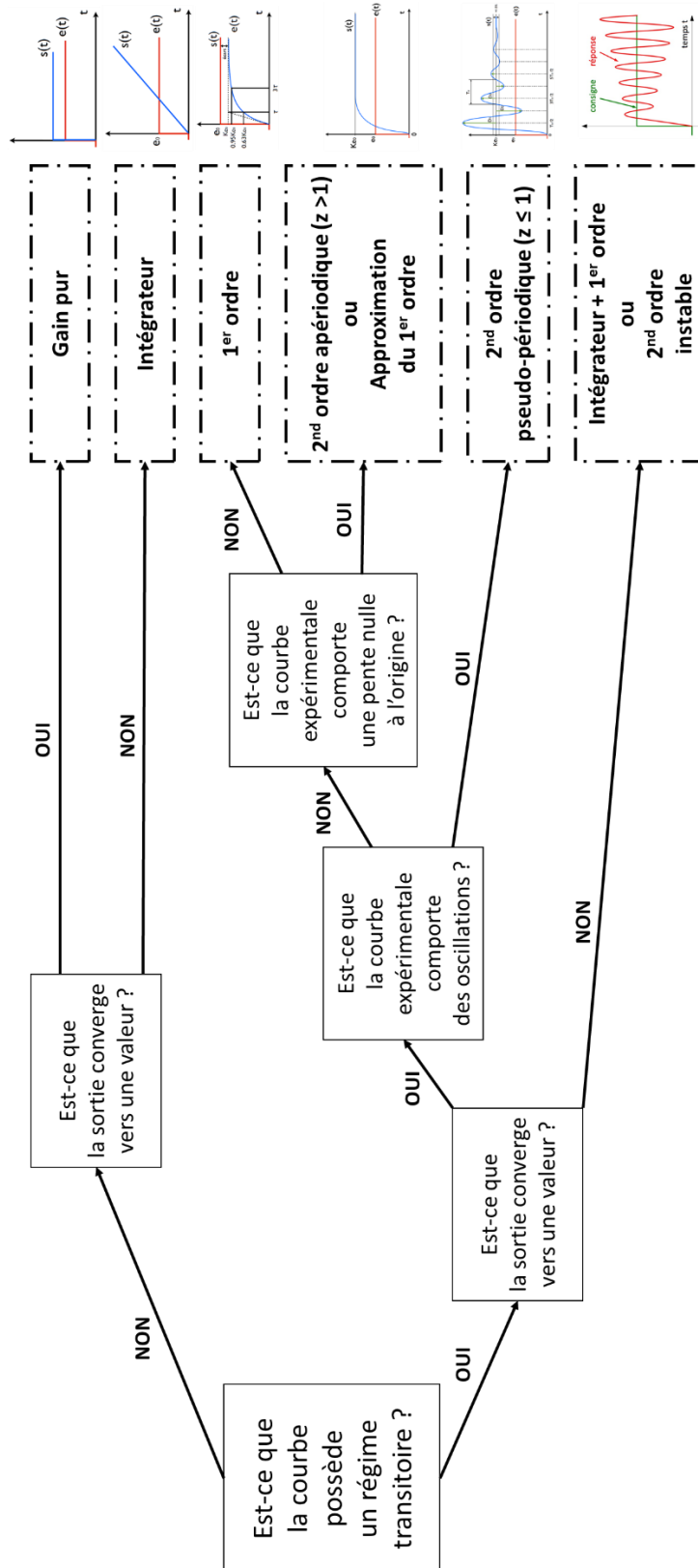
$$K_{BF} = \frac{K}{1+K} < 1 \quad z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1+K}} < z \quad \omega_{0BF} = \omega_0 \sqrt{1+K} > \omega_0$$

6.3. Avantages et inconvénients de la boucle de retour UNITAIRE

- Un 1^{er} ou 2nd ordre bouclé par un retour unitaire restent un 1^{er} ou 2nd ordre mais **avec de nouveaux paramètres**
- Un 1^{er} ou 2nd ordre bouclé par un retour unitaire n'auront jamais une erreur nulle car $K_{BF} \neq 1$
- Une augmentation du gain de la chaîne directe (K) pour un système bouclé par retour unitaire :
 - Améliorera la précision car $K_{BF} \rightarrow 1$
 - Un 1^{er} ordre bouclé sera plus rapide que ce 1^{er} ordre sans bouclage car $\tau_{BF} < \tau$
 - Un 2nd ordre bouclé sera moins amorti que ce 2nd ordre sans bouclage car $z_{BF} < z$
 - Un 2nd ordre bouclé sera plus rapide que ce 2nd ordre sans bouclage car $\omega_{0BF} > \omega_0$
- Cependant, une augmentation du gain dans la chaîne directe (K) entrainera des problèmes de dépassements et de stabilité (voir 2^{ème} année). D'où la nécessité de réaliser des compromis entre précision-rapidité-stabilité...

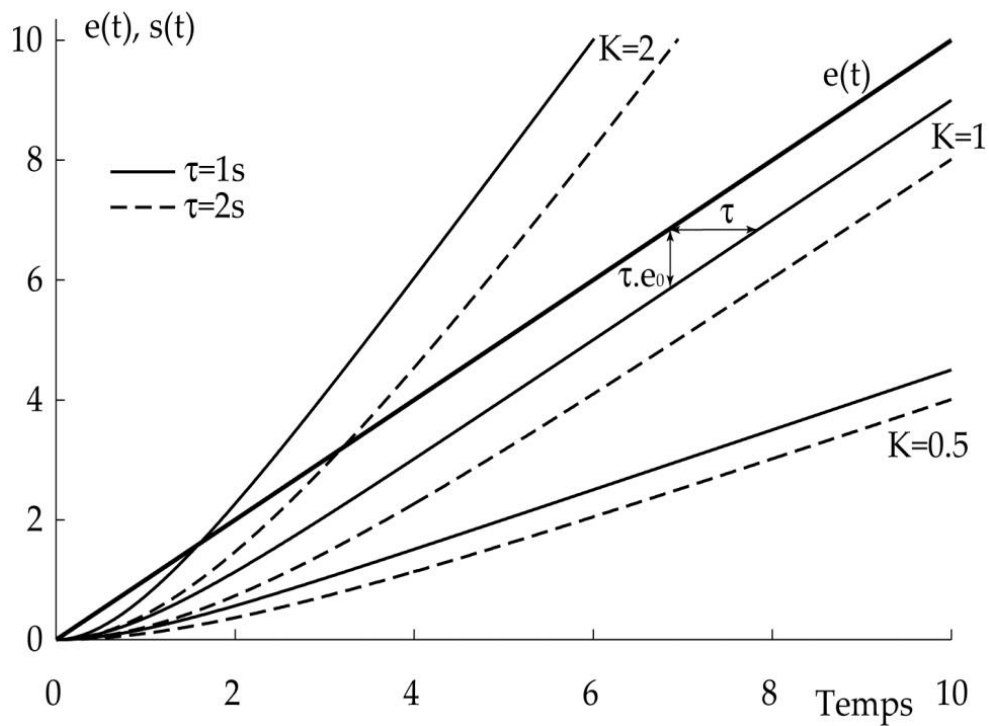
7. Choix du modèle de comportement lorsque l'on applique un échelon en entrée :

Voici un arbre de choix correspondant aux cas les plus classiques :

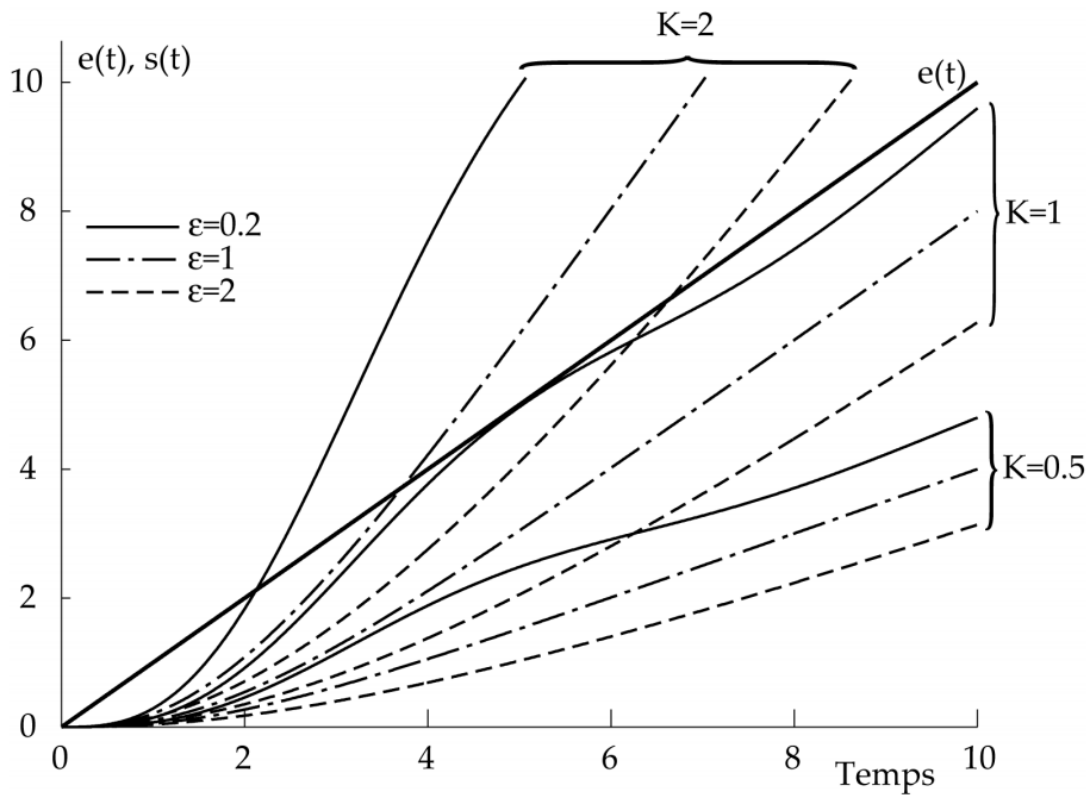


8. Réponses à d'autres signaux tests

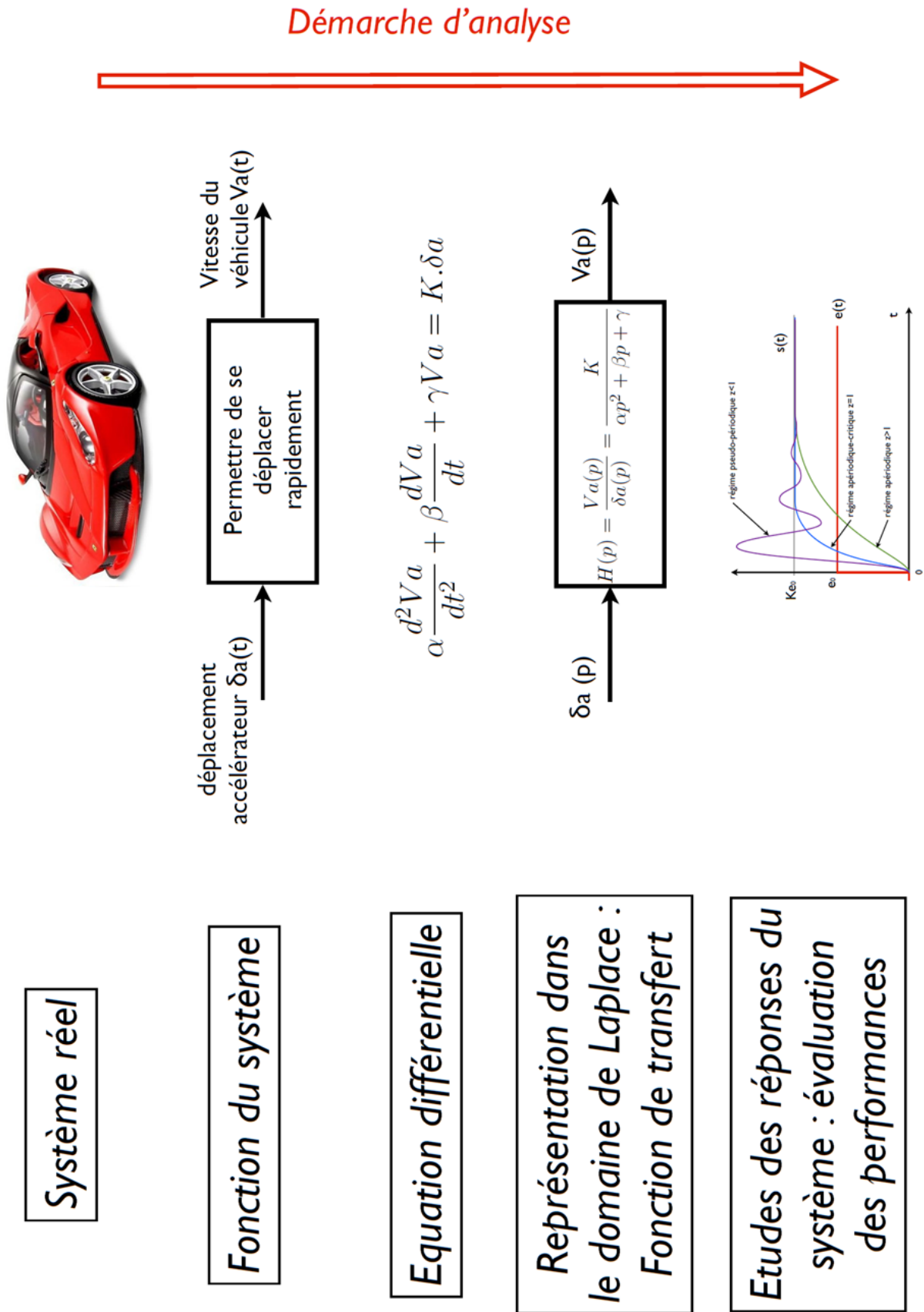
8.1. Réponse d'un système du premier ordre à une entrée en rampe



8.2. Réponse d'un système du second ordre à une entrée en rampe

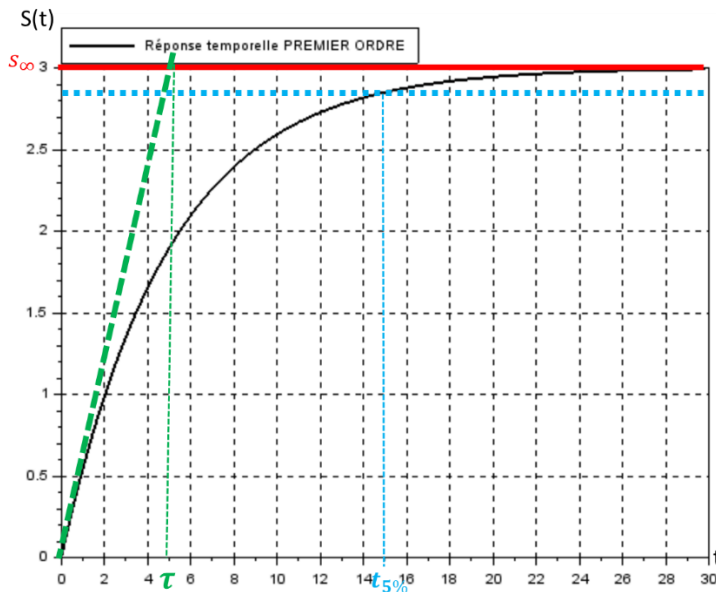


9. Résumé de la démarche d'analyse



10. Méthode de détermination graphique des paramètres d'une FT

10.1. Système du premier ordre



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Pente à l'origine non nulle

Détermination de K :

- $K = \frac{S_{\infty}}{e_0}$

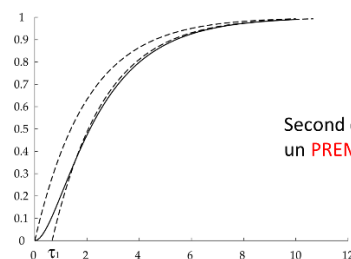
Attention : Si l'on trace $s(t)/e(t)$ en fonction du temps, K est alors directement la valeur finale

Détermination de τ :

- $t_{5\%} = 3. \tau$
- La tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant $t = \tau$

10.2. Système du second ordre

Si le régime est apériodique ($z > 1$) :



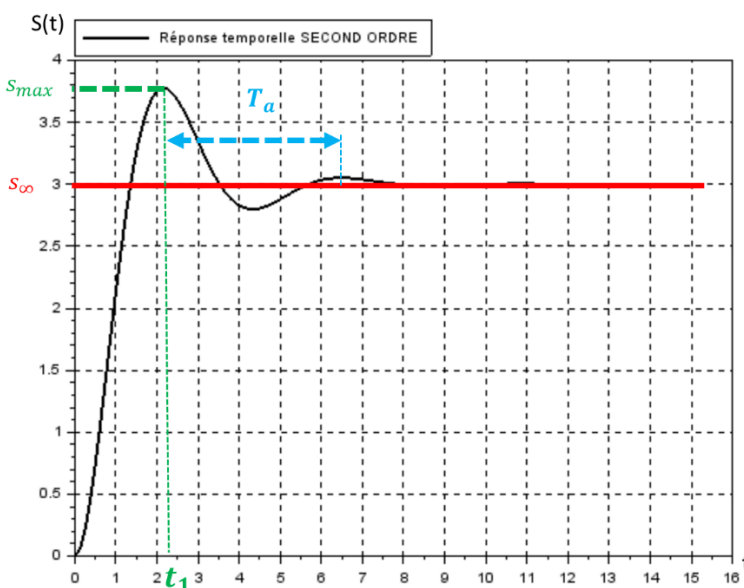
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Pente à l'origine nulle

Second ordre apériodique assimilable à un **PREMIER ORDRE AVEC UN RETARD**

$$s(t) \cong K e_0 \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}} \right) . u(t)$$

Si le régime est pseudo-périodique ($z < 1$) :



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Pente à l'origine nulle

Détermination de K :

- $K = \frac{S_{\infty}}{e_0}$

Attention : Si l'on trace $s(t)/e(t)$ en fonction du temps, K est alors directement la valeur finale

Détermination de z :

- $z = \frac{(\ln(D_1))^2}{\pi^2 + (\ln(D_1))^2}$ avec $D_1 = \frac{S_{max} - S_{\infty}}{S_{\infty}}$

Détermination de ω_0 (après z) :

- $\omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \cdot \sqrt{1-z^2}}$
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_a \cdot \sqrt{1-z^2}}$

11. ANNEXE – Tracé des abaques des systèmes du second ordre

```
def Discretisation(a,b,n):
    return [a+k*(b-a)/n for k in range(n)]

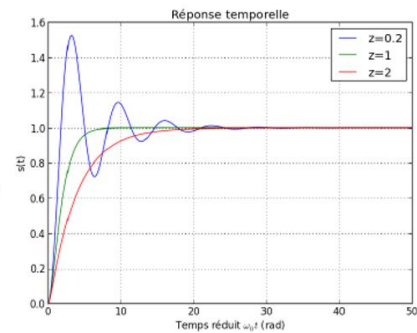
Liste_wot = Discretisation(0,50,1000)
```

```
def Solution(wot,z):
    if z>1:
        a=ma.sqrt(z**2-1)
        return 1-(1+z/a)*ma.exp(-wot*(z-a))/2-(1-z/a)*ma.exp(-wot*(z+a))/2
    elif z==1:
        return 1-(1+wot*z)*ma.exp(-wot*z)
    else:
        a = ma.sqrt(1-z**2)
        phi = ma.atan(a/z)
        return 1-ma.exp(-wot*z)*ma.sin(wot*a+phi)/ma.sin(phi)
```

```
def ReponseTemporelle(L,z):
    return [Solution(wot,z) for wot in L]
```

```
plt.figure() # Définition d'une nouvelle figure
for z in [0.2,1,2]:
    plt.plot(Liste_wot, ReponseTemporelle(Liste_wot,z),label='z='+str(z))
# Graphes
plt.xlabel("Temps réduit $\omega_0 t$ (rad)") # Légende de l'axe des abscisses
plt.ylabel("s(t)") # Légende de l'axe des ordonnées
plt.grid() # Affiche une grille
plt.legend(loc=1) # Affiche la légende
plt.title("Réponse temporelle") # Titre
plt.show() # Affichage de la figure
```

$$s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \right) e^{-\omega_0 t(z-\sqrt{z^2-1})} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \right) e^{-\omega_0 t(z+\sqrt{z^2-1})} & \text{si } z > 1 \\ 1 - (1 + \omega_0 t z) e^{-\omega_0 t z} & \text{si } z = 1 \\ 1 - \frac{e^{-\omega_0 t z}}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-z^2} + \varphi) \text{ avec } \sin \varphi = \sqrt{1-z^2} \text{ et } \cos \varphi = z & \text{si } z < 1 \end{cases}$$

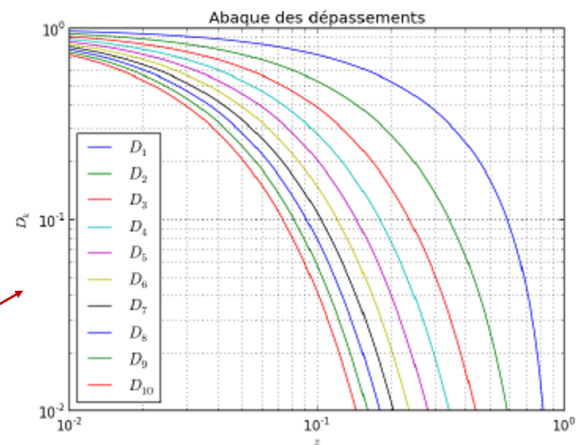


```
def DiscretisationLog(a,b,n):
    return [10**x for x in Discretisation(a,b,n)]
```

```
Liste_z = DiscretisationLog(-2,1,500)
Liste_wot = Discretisation(0,150,1000)
```

```
def Depassement(k,L):
    return [ma.exp(-k*ma.pi*z/(ma.sqrt(1-z**2))) for z in L]
```

```
plt.figure()
plt.xscale('log') # Echelle logarithmique abscisses
plt.yscale('log') # Echelle logarithmique ordonnées
plt.xlim(.01,1)
plt.ylim(0.01,1)
for k in range(1,11):
    Liste_Dk = Depassement(k,Liste_z)
    plt.plot(Liste_z,Liste_Dk,label='$D_{'+str(k)+'}$')
plt.xlabel('$z$')
plt.ylabel('$D_k$')
plt.title("Abaque des dépassements")
plt.legend(loc=0)
plt.grid(which='both') # Affiche une grille
plt.show()
```



```
def EstDansLaBande(x):
    return x<=1.05 and x>=0.95
```

```
def TempsDeReponse(L,z):
    n=len(L)
    k=n-1
    Test = True
    while k>=0 and Test:
        if EstDansLaBande(Solution(L[k],z)):
            k = k-1
        else:
            Test = False
    return L[min(k+1,n-1)]
```

```
Liste_Treduit = [TempsDeReponse(Liste_wot,z) for z in Liste_z]
```

```
plt.figure()
plt.xscale('log')
plt.yscale('log')
plt.xlim(.01,10)
plt.ylim(1,100)
plt.xlabel('$z$')
plt.ylabel('$\omega_0 T_r$ (rad)')
plt.title("Temps de réponse réduit")
plt.grid(which='both')
plt.plot(Liste_z,Liste_Treduit)
plt.show()
```

