TD 4
Robot Perseverance

I) Présentation du système

Le robot Perseverance a été conçu par la NASA pour étudier la composition chimique de la surface de la planète Mars. Pour satisfaire ce cas d'utilisation, le robot doit respecter plusieurs exigences grâce en partie aux solutions techniques listées ci-dessous :

Exigence	Critère	Niveau
S'approcher de la cible	Erreur sur la position cible	$x_s(t) - x_c(t) < 0.01\ m$
	Dépassement sur la réponse indicielle	Aucun
	Rapidité ($t_{5\%}$)	0.75 s
	Stabilité (Marge de phase --> 2nde année)	45 °

<u>Objectif :</u> Construire le modèle par schéma-bloc dans le domaine de Laplace, obtenir les réponses temporelles du système étudié puis de vérifier ses performances.

L'asservissement du déplacement est indispensable du fait de l'existence de perturbations mal connues, qui sont principalement engendrées par les rafales de vent sur la surface de Mars. La position asservie du robot est notée $x_s(t)$.

Pour effectuer cette approche, la motorisation est assurée par un bloc motoréducteur à courant continu dans chacune des six roues (cf. figure ci-après). Le mouvement ainsi généré est observé de manière optique. En effet, les caméras situées sur la tête périscopique Pancam permettent à tout instant de connaître la position absolue de Perseverance.

Le traitement de cette information par l'électronique embarquée fournit donc une mesure de l'erreur par rapport à la position cible.

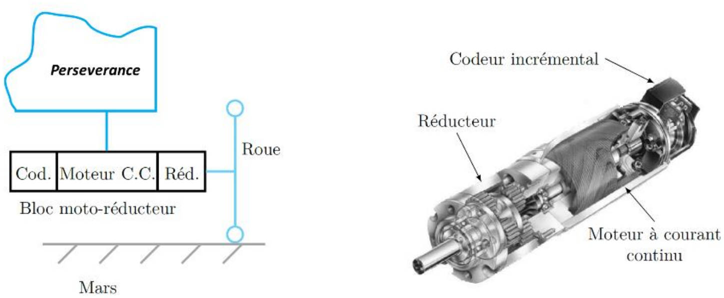


Schéma de la motorisation du robot et vue en écorché du moto-réducteur et de son codeur

II) Architecture du système asservi – Modèle de connaissance

Une étude dynamique du robot Esperance en déplacement par rapport au sol, sous l'action mécanique des moteurs et de la perturbation due au vent donne les équations suivantes (voir 2nde année) :

$$M_s \ddot{x}_s(t) = 6.F_{R-S}(t) + F_{V-S}(t) \qquad (1)$$

$$M_r \ddot{x}_s(t) = -F_{R-S}(t) + F_{M-R}(t) \qquad (2)$$

$$\frac{I_r}{R_r}\ddot{x}_s(t) = C_{S-R}(t) - R_r.F_{M-R}(t) \qquad (3)$$

<u>On définit les constantes suivantes :</u>
- $M_s = 180\ kg$ masse de Perseverance sans les roues,
- M_r masse d'une roue,
- I_r inertie de rotation d'une roue et de son moteur autour de son axe de révolution,
- $R_r = 0.05\ m$ rayon d'une roue,
- $\eta = 19$ rapport de réduction du réducteur à engrenages.

<u>On définit les variables suivantes :</u>
- $x_s(t)$ position de Perseverance sur Mars,
- $C_{S-R}(t)$ couple moteur appliqué sur la roue,
- $F_{R-S}(t)$ effort d'une roue sur Spirit,
- $F_{M-R}(t)$ effort de liaison,
- $F_{V-S}(t)$ effort dû au vent dans la direction $\overrightarrow{x_s}$, modélisant la perturbation sur Perseverance.

L'étude de la motorisation, dans le cas d'un moteur à courant continu, donne les équations suivantes :

$$u(t) = e(t) + R_m.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} \qquad (4)$$

$$\frac{C_{S-R}(t)}{\eta} = K_t.i(t) \qquad (5)$$

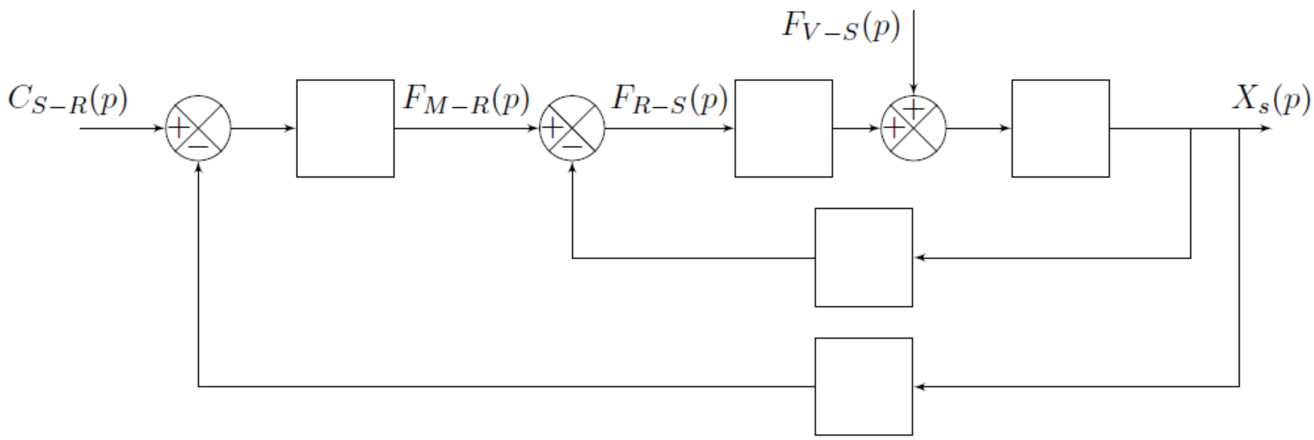
$$e(t) = K_e.\frac{\eta}{R_r}.\dot{x}_s(t) \qquad (6)$$

<u>On définit les constantes suivantes :</u>
- $R_m = 2.9\ \Omega$ résistance aux bornes de l'induit,
- L inductance aux bornes de l'induit,
- $K_t = 0.07\ N.m.A^{-1}$ constante de couple,
- $K_e = 0.07\ V.s$ constante de force contre électromotrice.

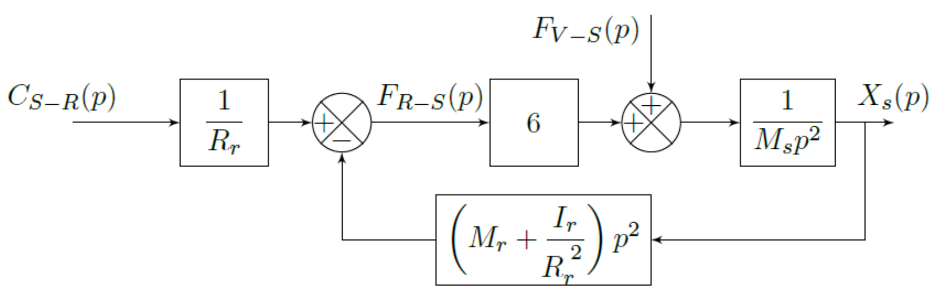
<u>On définit les variables suivantes :</u>
- $u(t)$ tension d'alimentation,
- $e(t)$ force contre électromotrice,
- $i(t)$ intensité.

Question 1 : Écrire la transformée de Laplace des équations de la Dynamique, notées de (1) à (3). On précisera si besoin les hypothèses nécessaires ainsi que les théorèmes utilisés.

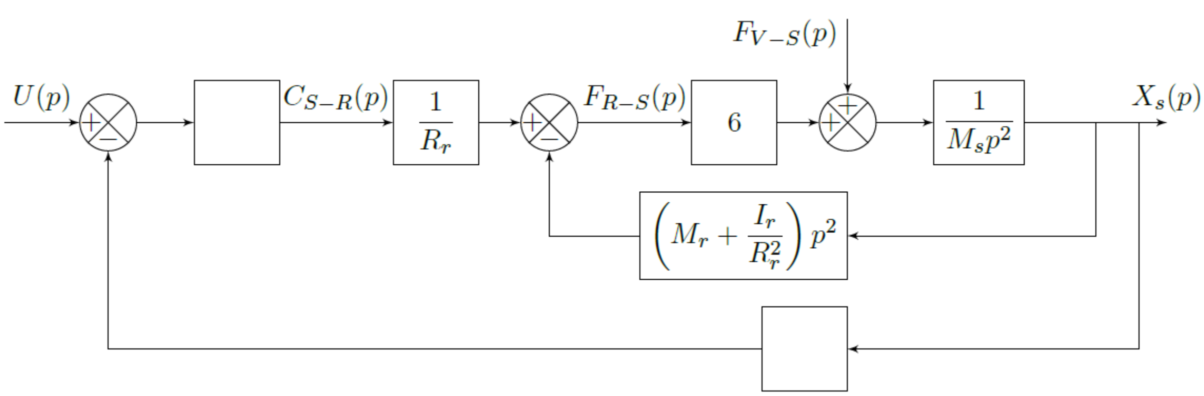
Question 2 : À partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, compléter le schéma bloc ci-dessous :



On pourrait montrer que le schéma bloc précédent peut être mis sous la forme suivante :



Question 3 : Écrire la transformée de Laplace des équations régissant le moteur à courant continu, notées (4) à (6) et remplir le schéma bloc ci-dessous :



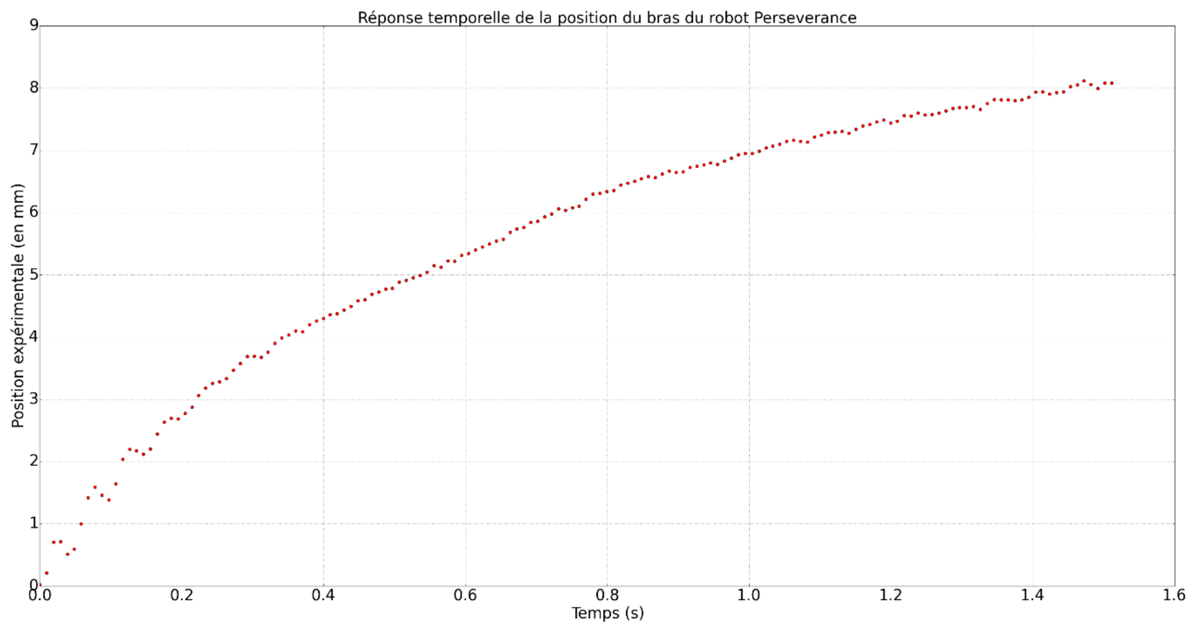
Question 4 : Ce schéma-blocs représente-t-il un système asservi ? Justifier la réponse.

III) Analyse des relevés expérimentaux – Modèle de comportement

Système non asservi en position

Une première étude est faite sur le bras du robot Perseverance lorsque ce dernier n'est pas asservi en position.

Les premiers relevés de position du bras sont fournis sur la courbe suivante :



On souhaite déterminer le plus précisément possible les paramètres caractéristiques de cette fonction assimilable à un 1^er^ ordre. Pour cela, nous allons utiliser la méthode des moindres carrés dont les explications théoriques sont données en ANNEXE.

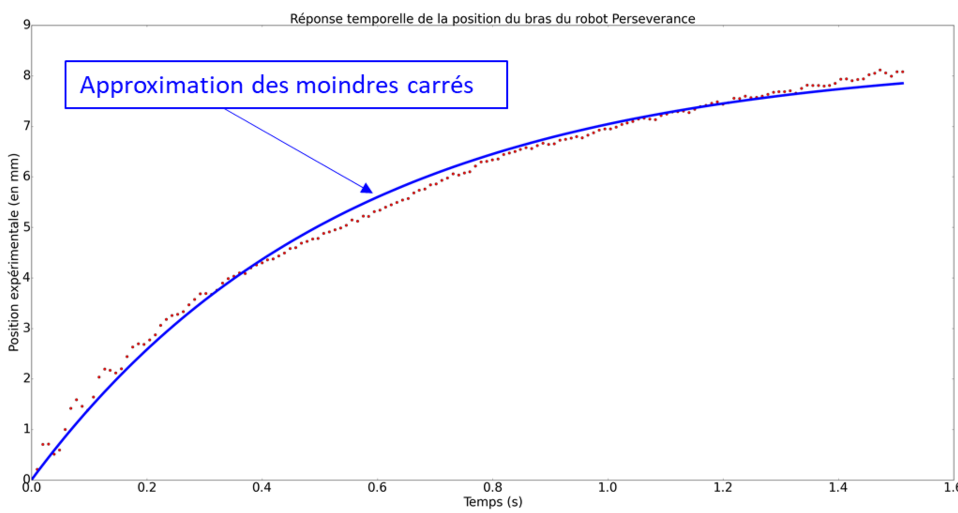
<u>**Question 5 :**</u> Compléter le code fourni ci-après (**lignes 30 à 33**) pour obtenir une approximation de la réponse temporelle par une fonction du premier ordre en utilisant la méthode des moindres carrés.

<u>Remarque :</u> On cherchera d'abord à calculer *a* et *b* à l'aide des formules définies dans l'ANNEXE. On cherchera ensuite à déterminer les valeurs de τ, *K* à l'aide des formules de l'ANNEXE ($\mathbf{a = e^{-\frac{T}{\tau}}}$ et $\mathbf{b = K \cdot \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right]}$).

<u>REMARQUE IMPORTANTE :</u> On va chercher ici à linéariser la fonction $\mathbf{y(t+T) = a \cdot y(t) + b}$ après les modifications de l'équation du premier ordre expliquées dans l'ANNEXE

```python
# Lecture des donnees experimentales sous forme '.csv'

dataCsv=np.loadtxt('Mesure_Position_Bras_Perseverance.csv', skiprows=0,delimiter=' ')

# Création des listes de temps et de position expérimentale

Temps=[dataCsv[i][0] for i in range(len(dataCsv))] # Liste de temps
PositionExp=[0.1*dataCsv[i][1] for i in range(len(dataCsv))] # Liste des positions expérimentales

# Fonction des moindres carrés

def Moindres_Carres(liste_temps,valeurs_exp,T):

# Cette fonction prends en arguments
# une liste de temps,
# des valeurs expérimentales
# et un pas de discrétisation

    somme_y=0
    somme_YT=0
    somme_yYT=0
    somme_yy=0
    indice_T=int(T/liste_temps[1]) # Adaptation entre le pas de discrétisation et le pas de temps des mesures
    N=len(liste_temps)-indice_T # Définition du nouveau nombre d'indices
    for i in range(N):
        somme_YT+=valeurs_exp[i+indice_T]
        somme_y+=valeurs_exp[i]
        somme_yYT+=valeurs_exp[i]*valeurs_exp[i+indice_T]
        somme_yy+=valeurs_exp[i]**2
    a=                              # A COMPLETER
    b=                              # A COMPLETER
    CteTemps=                       # A COMPLETER
    Gain=                           # A COMPLETER
    return(CteTemps, Gain)

# Détermination des paramètres de la position expérimentale

(TAU,K)=Moindres_Carres(Temps, PositionExp,0.01)
```

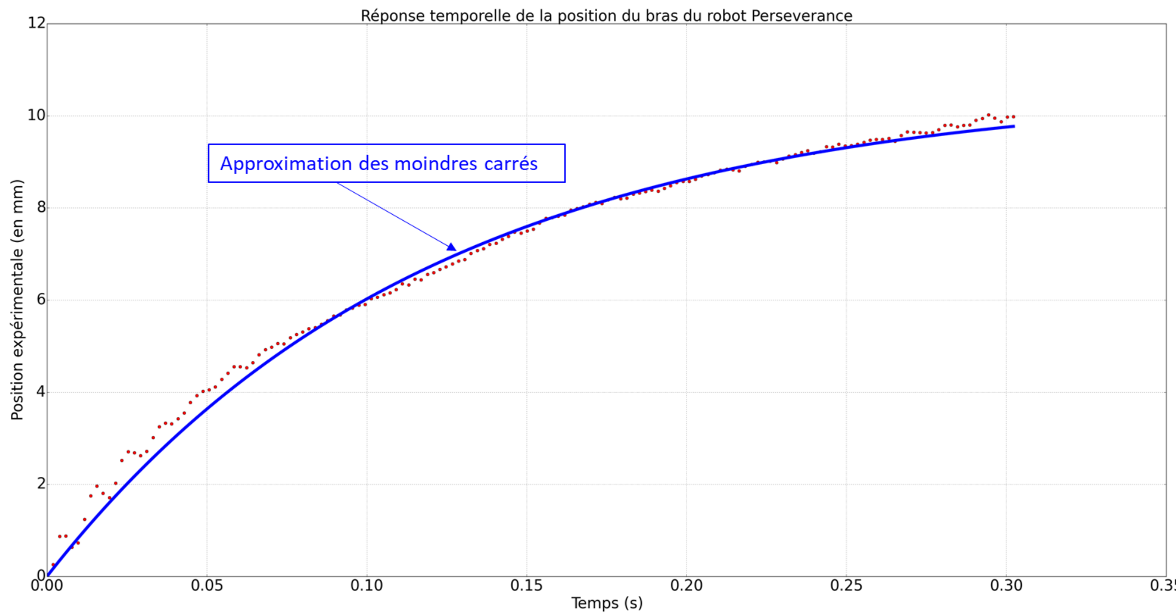
L'approximation des moindres carrés nous permet d'obtenir les résultats suivants pour $\boldsymbol{K = 0.837}$ et $\boldsymbol{\tau = 0.543\ s}$. La courbe approximée est tracée sur le graphique suivant pour une consigne en position de 1 cm.



<u>Question 6 :</u> Montrer que si le système n'est pas asservi, le cahier des charges ne peut pas être respecté.

Système asservi en position

Le codeur incrémental permet d'asservir la position du moteur commandant le bras du robot Perseverance et donc la position globale du bras. Pour une sollicitation en consigne de 1cm, les résultats expérimentaux sont tracés ci-dessous. La méthode des moindres carrés mise en place précédemment a été également utilisée pour obtenir les nouveaux coefficients du système du premier ordre $\boldsymbol{K_s = 1.024}$ et $\boldsymbol{\tau_s = 0.127\ s}$.



<u>Question 7 :</u> Montrer que si le système est asservi, le cahier des charges est alors respecté.

Point Méthode : Méthode des moindres carrés

Il est de nombreuses situations pratiques où l'on cherche à associer un modèle mathématique à des données expérimentales, par exemple à deux séries de données $(t_i)_{\{i\in[\![1,m]\!]\}}$ et $(y_i)_{\{i\in[\![1,m]\!]\}}$.

La notion d'association revient à rechercher une courbe passant au mieux par tous les points $M_i(t_i, y_i)$. Le plus souvent, la courbe recherchée représente une fonction f, que l'on souhaite la plus simple possible (par exemple affine ou polynomiale). Ainsi, on est amené à rechercher les paramètres $q = (q_1, q_2, \dots, q_p) \in \mathbb{R}^p$ de la fonction que l'on notera f_q. Une approximation par la méthode des moindres carrés consiste alors à rechercher la fonction f_q minimisant la somme des carrés des écarts entre $f_q(t_i)$ et y_i. Ainsi, on suppose l'existence de q^*, une valeur du paramètre q réalisant le minimum de la fonction J, c'est-à-dire tel que :

$$J(q^*) \leq J(q) \text{ avec } J(q) = \sum_{i=1}^{m}(y_i - f_q(t_i))^2$$

où J est la fonction coût ou fonction objectif.

Soit une série de données représentée par un nuage de points $\{(t_i, y_i), 1 \leq i \leq m\}$ de $\mathbb{R}^2$. Une régression linéaire consiste en la recherche de la droite d'équation $y = a.t + b$ passant au plus près des m points par la méthode des moindres carrés.

Dès lors, le problème revient à déterminer $q = (a, b)$ réalisant le minimum de la fonction coût

$$J(a,b) = \sum_{i=1}^{m}(y_i - a.t_i - b)^2$$

La recherche du minimum s'apparente à la recherche d'un point critique[1] et nécessite d'exprimer un système de deux équations associées aux dérivées partielles de la fonction de coût J par rapport aux paramètres a et b :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial J}{\partial a}(a,b) = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i\,(y_i - a.t_i - b) \\ 0 = \dfrac{\partial J}{\partial b}(a,b) = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(y_i - a.t_i - b) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(t_i)^2\right) + b\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i\, y_i \\ a\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i\right) + bm = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \end{cases}$$

admettant comme solution :

[1] Un point critique est un point annulant les dérivées partielles d'ordre 1. Sous réserve d'hypothèses sur l'ensemble des solutions admissibles et sur J, un minimum est un point critique, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, pour une fonction d'une variable, si $J'(q) = 0$, J n'admet pas nécessairement un minimum, mais peut avoir un maximum local ou un point d'inflexion.

$$\boldsymbol{a = \frac{Cov(t,y)}{V(t)}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{b = \bar{y} - a\bar{t}}$$

où nous avons introduit les notations de moyenne, de covariance et de variance des séries considérées, respectivement définies comme :

$$\boldsymbol{\bar{t} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} t_i} \qquad \boldsymbol{\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i} \qquad \boldsymbol{Cov(t,y) = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} t_i\, y_i\right) - \bar{t}\bar{y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{V(t) = Cov(t,t)}$$

Cela prouve que la droite obtenue par régression linéaire admet pour équation $y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$ et passe par le point de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ qui est l'isobarycentre du nuage de points. Pour évaluer la qualité de l'approximation, on utilise généralement le *coefficient de corrélation linéaire* $R \in [-1; 1]$, défini comme :

$$\boldsymbol{R = \frac{Cov(t,y)}{\sqrt{V(t)V(y)}}}$$

Si $R = 0$ les deux variables ne sont pas corrélées mais si $R = \pm 1$, les deux variables sont linéairement dépendantes.

C'est ce qui explique l'usage courant du carré du coefficient de corrélation $R^2 \in [0; 1]$ comme mesure de la qualité de l'approximation.

Application de la méthode des moindres carrés à une réponse du premier ordre

L'équation différentielle modélisant le comportement dynamique d'un système linéaire du premier ordre est de la forme : $\boldsymbol{\tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot u(t)}$ avec : τ : constante de temps ; K : gain statique

Dans les conditions d'Heaviside ($y(O^+) = 0$), la réponse à un échelon $u(t) = U_0.u(t)$ est donnée par l'équation suivante : $y(t) = K \cdot E_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right].u(t)$. Par la suite, nous nous affranchirons de la notation $u(t)$ par simplification d'écriture et considèrerons dans la suite un échelon d'amplitude 1 ($\mathrm{E}_0 = 1$).

Détermination des paramètres de la réponse théorique

Considérons un intervalle de temps T.

$$\mathrm{y(t+T) = K \cdot \left[1 - e^{-\frac{t+T}{\tau}}\right] = K \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{-\frac{T}{\tau}}\right] = K \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \cdot e^{-\frac{T}{\tau}} + K \cdot \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right]}$$

On obtient finalement : $\mathrm{y(t+T) = y(t) \cdot e^{-\frac{T}{\tau}} + K \cdot \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right]}$.

Il s'agit d'une équation affine de la forme : $\mathbf{y(t+T) = a \cdot y(t) + b}$

avec $\mathbf{a = e^{-\frac{T}{\tau}}}$ et $\mathbf{b = K \cdot \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right]}$