

Cinétique du Solide

Compétences attendues :

- ✓ Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.

1 Notion de solide

1.1. Définitions et hypothèses

- **Le solide S est un ensemble indéformable de « points matériels » si :**

$$\forall (Q, P) \text{ bipoint de } S^2, \quad \left(\frac{d\|\overrightarrow{QP}\|}{dt} \right)_{R_g} = 0$$

- **Le solide est homogène** si la masse volumique ne varie pas quel que soit le point où l'on se place. **La masse du solide est conservative** si la masse ne varie pas avec le temps.

$$\forall (Q, P) \in S^2, \quad \rho(P) = \rho(Q), \quad \left(\frac{d\rho(P)}{dt} \right)_{R_g} = 0$$

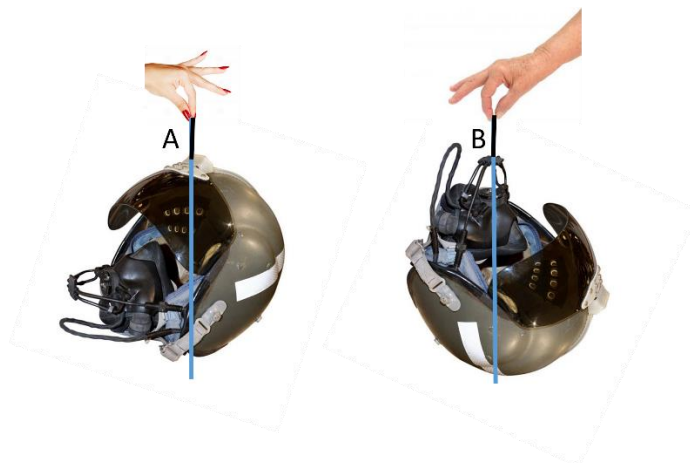
Remarque : La majeure partie des résultats est obtenue par extension au solide des résultats connus pour un point en intégrant sur le volume. Ces démonstrations font intervenir des fonctions dépendantes du temps telles que la vitesse et l'accélération.

1.2. Centre de masse / centre de gravité

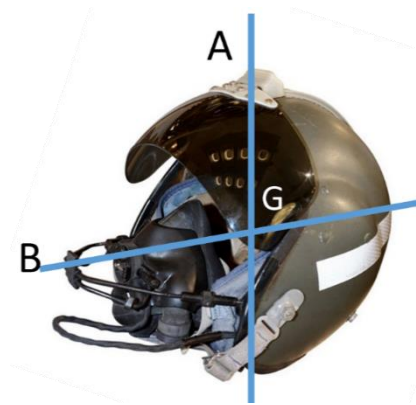
1.2.1. Expérimentalement

Comment déterminer expérimentalement le centre de gravité d'un casque d'avion de chasse ?

On suspend un casque d'avion de chasse à un fil, fixé successivement en A et B. On marque ainsi la continuité du fil par deux droites qui sont sécantes en un point.



Le casque n'est soumis qu'à deux forces : la tension du fil et son propre poids, s'appliquant en ce fameux point de concours : le centre de gravité.



1.2.2. Analytiquement

- **Définition générale :**

Considérons un système de n points matériels P_i de masse m_i .



Le centre de masse G de cet ensemble est défini par le barycentre des points P_i affectés des coefficients m_i , c'est-à-dire : $\overrightarrow{MOG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OP_i}$ ou $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$.

(O désigne un point quelconque et la masse M est égale à $\sum_{i=1}^n m_i$).

Pour un solide, au lieu d'utiliser cette somme discontinue, on a recours à une somme intégrale. Pour cela, on découpe le solide en éléments dm arbitraires centrés sur les points P puis en faisant tendre $dm \rightarrow 0$, on obtient à la limite :

$$\overrightarrow{MOG} = \int_S \overrightarrow{OP} dm \quad \text{ou} \quad \int_S \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$$



- **Coordonnées du centre de masse :**

On suppose un repère orthonormé $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. L'expression précédente permet de définir le vecteur position \overrightarrow{OG} . Pour obtenir les coordonnées du centre de masse, il suffit de projeter la relation vectorielle sur les axes de la base du repère.

Exemple : On note $\overrightarrow{OG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$ et $\overrightarrow{OP} = x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z}$

$$\text{d'où } x_G = \frac{\int_{\Sigma} x \cdot dm}{M(\Sigma)} ; y_G = \frac{\int_{\Sigma} y \cdot dm}{M(\Sigma)} ; z_G = \frac{\int_{\Sigma} z \cdot dm}{M(\Sigma)} .$$

Remarque : Si un solide admet un plan, un axe ou un centre de symétrie droite ou oblique, **son centre de masse se trouve dans le plan, sur cet axe ou au centre de symétrie.**

1.2.3. Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides S_i

Si un ensemble de solides Σ de masse M est constitué de n solides S_i de masse m_i ($M = \sum_{i=1}^n m_i$), il est possible de déterminer la position du centre de masse G de cet ensemble de solides en concentrant les masses m_i aux centres de masse G_i des solides S_i correspondant, soit :

$$(\sum_{i=1}^n m_i) \overrightarrow{OG} = M \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OG_i} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GG_i} = \vec{0}$$

Exemple : Calculer le centre de gravité dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) du système bielle/manivelle/piston, en prenant comme origine le point O et en exprimant les coordonnées en fonction de l'angle de rotation θ .

Solide 1 (manivelle) : m_1 et $\|\overrightarrow{OA}\| = l_1$

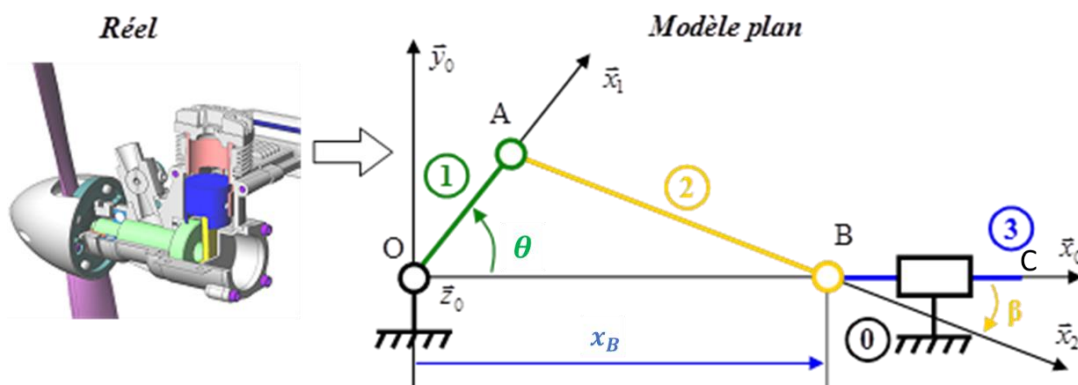
Solide 2 (bielle) : m_2 et $\|\overrightarrow{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) : m_3 et $\|\overrightarrow{BC}\| = l_3$

Le centre de gravité de chaque solide est confondu avec le centre géométrique des pièces.

On rappelle la loi E/S du mécanisme : $x_B = l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}$

On donne aussi : $\cos(\beta) = \frac{x_B - l_1 \cos(\theta)}{L_2}$ et $\sin(\beta) = -\frac{L_1 \sin(\theta)}{L_2}$



$$\begin{cases} x_{G1} = \frac{l_1}{2} \cos(\theta) \\ y_{G1} = \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{G2} = \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \frac{x_B}{2} \\ y_{G2} = \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} x_{G3} = x_B + \frac{l_3}{2} \\ y_{G3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left((m_1 + m_2) \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \left(m_3 + \frac{m_2}{2} \right) x_B + m_3 \frac{l_3}{2} \right) \\ y_G = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \left(\frac{l_1}{2} \sin(\theta) \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left((m_1 + m_2) \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \left(m_3 + \frac{m_2}{2} \right) (l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}) + m_3 \frac{l_3}{2} \right) \\ y_G = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \left(\frac{l_1}{2} \sin(\theta) \right) \end{cases}$$

1.3. Etude d'une ligne matérielle plane

1.3.1. Centre de masse

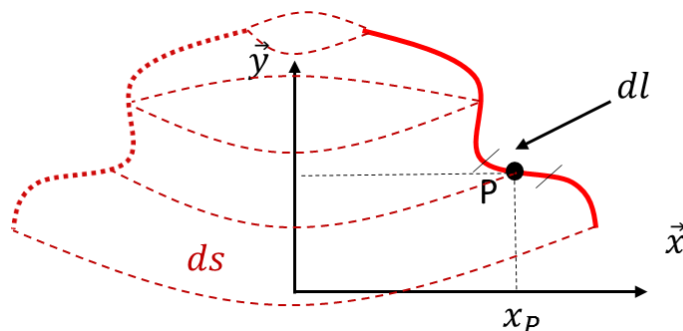
Nous définissons une masse linéique par $\mu = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta l}$ avec pour les solides homogènes : $\mu = \text{cste}$.

La section du solide (S) est de dimensions faibles par rapport à sa longueur. La définition générale du centre de masse est : $\overrightarrow{LOG} = \int_L \overrightarrow{OP} dl$ ou $\int_L \overrightarrow{GP} dl = \vec{0}$.

1.3.2. Théorème de Guldin (Th n°1)

Le théorème de Guldin (n°1) permet de déterminer le centre de masse (ou centre d'inertie) d'une ligne plane.

Soit une courbe plane (C) de longueur L appartenant au plan (O, \vec{x}, \vec{y}) et **ne coupant pas l'axe** (O, \vec{y}) .



Soit G le centre de masse de la courbe C.

Par définition : $M(\Sigma) \overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} dm$ ou encore, $\overrightarrow{LOG} = \int_C \overrightarrow{OP} dl$

On projette l'équation sur l'axe (O, \vec{x}) : $Lx_G = \int_C x_P dl$

On fait tourner la ligne autour de l'axe (O, \vec{y}) et on regarde la surface engendrée :

$$2\pi \cdot L \cdot x_G = \int_C 2\pi \cdot x_p \cdot dl$$

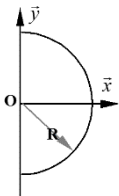
Dans la rotation autour de cet axe, l'élément dl de (C) centré sur le point P engendre la surface $ds = 2\pi \cdot x_p$ et si on intègre cet élément de surface sur toute la longueur de la courbe C , on obtient la surface engendrée par la ligne C : $S = \int_C ds$.

On en déduit donc :

$$2\pi \cdot L \cdot x_G = \int_C 2\pi \cdot x_p \cdot dl = S$$

Th de Guldin : L'aire de la surface engendrée par une ligne C , de longueur L , tournant autour d'un axe Δ situé dans son plan et qui ne le coupe pas, est égal au produit de la longueur L par la circonférence décrite par le centre de masse G de la courbe C .

Exemple : Centre de masse d'une ligne matérielle homogène demi-circulaire (centre O , rayon R).



$$\text{Nous avons } x_G = \frac{S}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R} \text{ soit } x_G = \frac{2R}{\pi}.$$

Exemple : Détermination de la surface totale d'un cône :

Montrer que $S_{lat} = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$ et donc que $S_{c\hat{o}ne} = \pi \cdot R \cdot (\sqrt{R^2 + H^2} + R)$

1.4. Etude d'une surface matérielle

1.4.1. Centre de masse

Nous définissons une masse surfacique $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta S}$ pour une plaque homogène $\sigma = \text{cste}$.

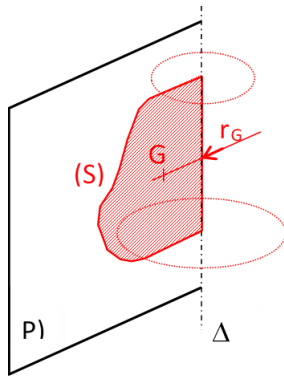
Pour une surface matérielle, nous considérons que l'épaisseur est négligeable par rapport aux autres dimensions. Nous obtenons la relation :

$$S \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} ds \text{ ou encore } \int_S \vec{GP} ds = \vec{0}.$$

1.4.2. Théorème de Guldin (Th n°2)

Le théorème de Guldin (n°2) permet de déterminer le centre de masse (ou centre d'inertie) d'une surface plane.

Soit une surface plane (S) de surface S appartenant au plan (O, \vec{x}, \vec{y}) et **ne coupant pas l'axe** (O, \vec{y}) .



Soit G le centre de masse de la surface S, par définition :

$$M(\Sigma) \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} dm \quad \text{ou encore,} \quad S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} ds$$

On projette l'équation sur l'axe (O, \vec{x}) : $S \cdot x_G = \int_S x_p ds$

En procédant de la même façon que précédemment pour le théorème n°1, on obtient :

$$2\pi \cdot S \cdot x_G = \int_S 2\pi \cdot x_p \cdot ds = V$$

Th de Guldin : Le volume engendré par la surface S, de surface S, tournant autour d'un axe Δ situé dans son plan et qui ne le coupe pas, est égal au produit de la surface S par la circonférence décrite par le centre de masse G de la surface S.

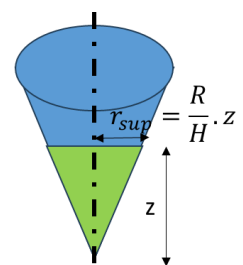
Exemple : Détermination du volume d'un cône :

Montrer que $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$

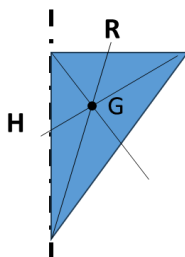
On peut également le démontrer par intégration :

$$V_{\text{cône}} = \int_V r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz = \int_0^H \int_0^{r_{\text{sup}}} \int_0^{2\pi} r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

avec $r_{\text{sup}} = \frac{R}{H} \cdot z$ (car la borne d'intégration du rayon dépend de l'altitude du disque).



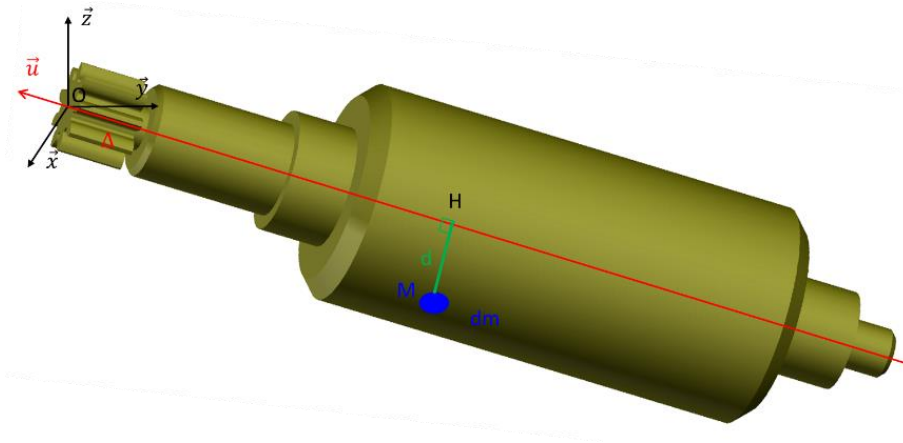
Ou avec le théorème de Guldin n°2 :



$$V_{\text{cône}} = 2\pi \cdot S \cdot x_G = 2\pi \cdot \left(\frac{R \cdot H}{2} \right) \cdot \frac{R}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

2. Moment d'inertie autour d'un axe

2.1. Moment d'inertie d'un solide



- Par rapport à un axe Δ :

H = projection orthogonale de $M \in S$ sur $\Delta = (O, \vec{u})$

$$I(S, \Delta) = \int_S \overline{MH}^2 dm = \int_S d^2 dm = I_{Ou}(S)$$

d = distance de M à l'axe Δ

- Par rapport à un point A :

$$I_A(S) = \int_S \overline{AM}^2 dm$$

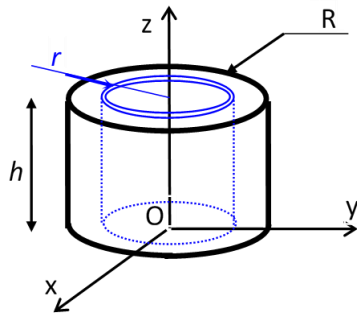
Soit M de coordonnées x, y, z dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$I_O(S) = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm \qquad I_{Ox}(S) = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

Remarque : Unité : **kg.m²**

Si le moment d'inertie, proportionnel au carré de la distance à l'axe de rotation, est faible, le solide atteint rapidement sa vitesse de rotation nominale autour de cet axe \Rightarrow nécessité de diminuer l'inertie des solides en rotation (moteurs, ...cf patineurs). L'inertie peut être utile pour réguler des mouvements (volants d'inertie).

Exemple 1 : Déterminer I_{Oz} pour le cylindre de révolution de rayon R , de hauteur h et de masse m .



$$\begin{aligned}
 I_{Oz}(S) &= \int_S (x^2 + y^2) dm \Rightarrow \text{coordonnées polaires} \\
 &= \int_S r^2 dm \quad \text{avec } dm = \rho dv = \rho 2\pi r h dr \\
 &\quad (\text{en regroupant tous les points } M \text{ à même distance } r \text{ de } Oz) \\
 &= \int_S \rho 2\pi r^3 h dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} \Rightarrow \mathbf{I_{Oz} = m \frac{R^2}{2}}
 \end{aligned}$$

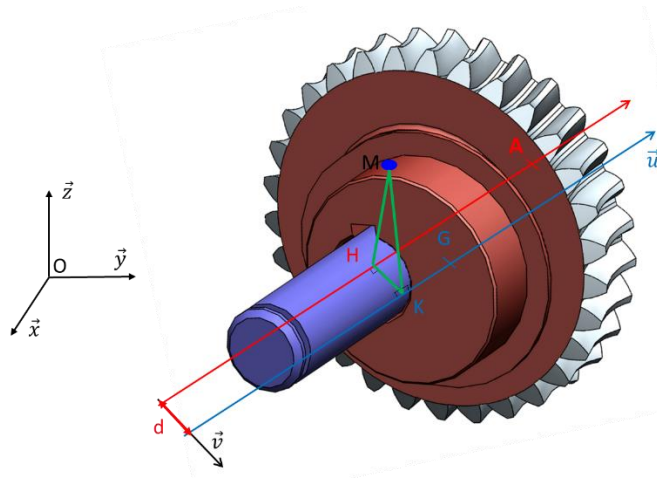
Exemple 2 : Déterminer le moment d'inertie d'une sphère de rayon R , de masse m par rapport à son centre O puis par rapport à un diamètre Δ quelconque.

$$I_O = \int_S r^2 dm \quad \text{avec } dm = \rho dv = \rho d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \rho 4\pi r^2 dr$$

$$I_O = \int_S \rho 4\pi r^4 dr = \rho 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} m R^2$$

$$\text{Or } I_\Delta = I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} \text{ par symétrie} \quad \text{et } I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} = 2 I_O = 3 I_\Delta \quad \text{d'où } \mathbf{I_\Delta = \frac{2}{5} m R^2}$$

2.2. Théorème de Huygens



Soit un axe \vec{u} passant par le centre de gravité G d'un solide S et un axe parallèle à la distance d passant par le point A . On cherche la relation entre $I_{Gu}(S)$ et $I_{Au}(S)$.

$$I_{Au}(S) = \int_S \overrightarrow{HM}^2 dm = \int_S (\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KM})^2 dm \quad (\text{par définition})$$

$$I_{Au}(S) = \int_S \overrightarrow{HK}^2 dm + \int_S \overrightarrow{KM}^2 dm + 2 \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KM} dm$$

$$I_{Au}(S) = md^2 + I_{Gu}(S) + 2 \cdot \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KM} dm$$

(définitions précédentes + figure + $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GM}$)

$$I_{Au}(S) = md^2 + I_{Gu}(S) + 2 \cdot \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KG} dm + 2 \cdot \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{GM} dm$$

Or $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KG}$ sont orthogonaux et $2 \cdot \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{GM} dm = 2 \cdot d \cdot \vec{v} \int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$ (par définition du centre de gravité).

D'où :
$$I_{Au}(S) = I_{Gu}(S) + md^2$$

2.3. Matrice d'inertie (ou tenseur d'inertie) d'un solide en Q

L'opérateur d'inertie et la matrice qui lui est associée permettent de caractériser la répartition de masse d'un solide.

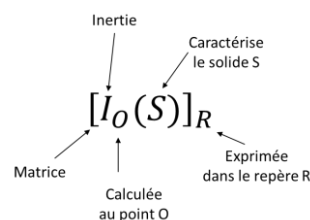
On se donne **dans le repère R associé au solide** les coordonnées des vecteurs considérés :

$$\overrightarrow{QP} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z} \quad \vec{u} = p \cdot \vec{x} + q \cdot \vec{y} + r \cdot \vec{z}$$

Cette matrice est ici définie dans un repère R associé au solide.

$$[I_Q(S)]_R = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & - \int_S xy dm & - \int_S xz dm \\ - \int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & - \int_S yz dm \\ - \int_S xz dm & - \int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{Q,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{Q,R}$$

Notation :



Dans la plupart des cas, on pourra omettre la notation avec le repère R pour alléger les notations.

Remarque : Si on demande de calculer E, il n'y a pas de signe « moins ».

On montre que le moment d'inertie du solide S par rapport à un axe \vec{u} passant par Q s'écrit :

$$I_{Qu}(S) = \vec{u} \cdot [I_Q(S)] \vec{u} \quad I_{Quv}(S) = \vec{u} \cdot [I_Q(S)] \vec{v}$$

Attention : La matrice d'inertie d'un solide est calculée en **un point** et **dans un repère lié au solide**.

2.4. Particularités de l'opérateur

2.4.1. Conventions

Avec $R = (Q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

- A, B et C sont les moments d'inertie par rapport aux axes (Q, \vec{x}) , (Q, \vec{y}) et (Q, \vec{z}) .
- D, E et F sont les produits d'inerties par rapport aux plans (Q, \vec{y}, \vec{z}) , (Q, \vec{x}, \vec{z}) , (Q, \vec{x}, \vec{y}) .

2.4.2. Extensions

On peut étendre la notion de moment d'inertie en le définissant par rapport à un élément géométrique quelconque. Ce qui permet d'écrire en considérant, par exemple, que $I(S/(Q, \vec{y}, \vec{z})) = \int_S x^2 dm$ et $I(S/(Q, \vec{x}, \vec{z})) = \int_S y^2 dm$

$$I(S/(Q, \vec{x}, \vec{z})) + I(S/(Q, \vec{y}, \vec{z})) = I(S/(Q, \vec{z})) = C$$

La somme des moments d'inertie par rapport à deux plans orthogonaux permet d'obtenir le moment d'inertie par rapport à la droite définie par l'intersection de ceux-ci.

Ou encore :

$$I(S/(Q, \vec{x}, \vec{z})) + I(S/(Q, \vec{y}, \vec{z})) + I(S/(Q, \vec{x}, \vec{y})) = I(S/Q) = \frac{1}{2} (A + B + C)$$

La somme des moments d'inertie par rapport à trois plans orthogonaux permet d'obtenir le moment d'inertie par rapport au point défini par l'intersection de ceux-ci.

2.4.3. Repères particuliers

Compte tenu de sa définition, la matrice d'inertie d'un solide est symétrique et ses vecteurs propres sont orthogonaux.

Il existe donc une base orthonormée dans laquelle la matrice est diagonale. Associée au point Q, cette base est appelée **Repère Principal d'Inertie**.

Si $Q = G$, on ira jusqu'à parler de Repère Central d'Inertie

Lorsqu'un solide possède un élément de symétrie (plan, droite, point), cet élément fait partie du repère principal d'inertie. De plus, le CdG (G) appartient à cet élément de symétrie.

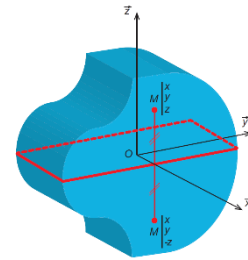
La matrice d'inertie est bien sûr plus facile à calculer dans un repère qui fait apparaître les symétries.

2.5. Propriétés de la matrice d'inertie - Cas particuliers de solides

Un Plan de symétrie (Q, \vec{x}, \vec{y}) :

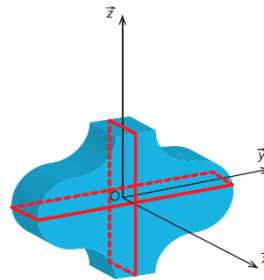
L'axe perpendiculaire à ce plan (donc \vec{z}) est principal d'inertie.

$$D=0 \text{ et } E=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qxyz}$$



Deux Plans de symétrie (Q, \vec{x}, \vec{y}) et (Q, \vec{x}, \vec{z}) :

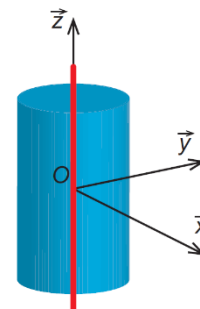
$$D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qxyz}$$



Un axe de Révolution (Q, \vec{z}) :

$$A = B \text{ et } D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qz}$$

$$A + B = 2A = 2B = C + 2 \cdot \int_S z^2 dm = \int_S r^2 dm + 2 \cdot \int_S z^2 dm$$



Un centre de symétrie sphérique (G forcément) :

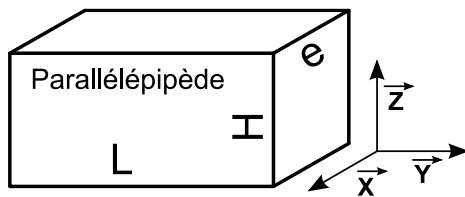
$$A=B=C \text{ et } D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_Q$$

$$A + B + C = 3A = 3B = 3C = 2 \cdot \int_S r^2 dm$$

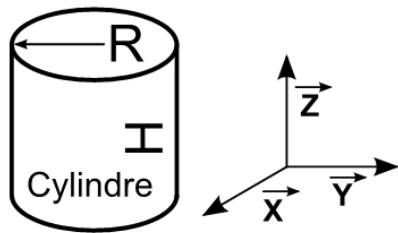
Remarques :

- Le repère dans lequel est exprimé la matrice d'inertie est très important.
- La matrice a la même forme (mais pas forcément les mêmes valeurs) quel que soit le point de l'axe où elle est calculée et **le moment d'inertie autour de l'axe est constant quel que soit le point de calcul tant que l'on reste sur l'axe.**

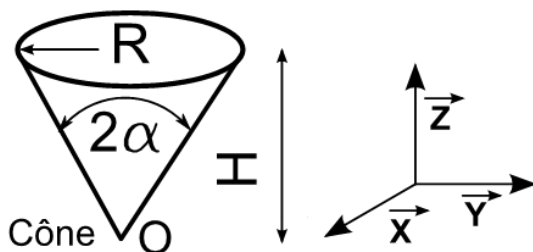
2.6. Les solides élémentaires

Parallélépipède en G3 plans de symétrie ($D = E = F = 0$).

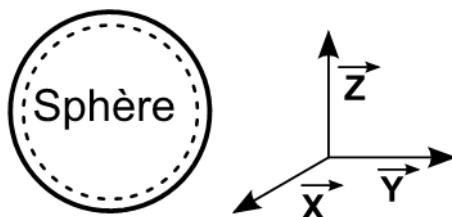
$$\begin{bmatrix} M \frac{H^2 + L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M \frac{H^2 + e^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & M \frac{L^2 + e^2}{12} \end{bmatrix}_{G,R}$$

Cylindre en GAxe de révolution G_z : $A = B$ et $D = E = F = 0$.

$$\begin{bmatrix} M(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}) & 0 & 0 \\ 0 & M(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}) & 0 \\ 0 & 0 & M\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{G,z}$$

Pour tous les solides de révolution : $A = B$ et $A + B = 2A = 2B = C + 2 \int_S z^2 dm$ On intègre en cylindrique avec $x^2 + y^2 = r^2$ et $dV = r dr d\theta dz$ Cône en O (sommet)Hauteur H sur \vec{z} et base circulaire de rayon R.Utiliser des disques d'épaisseur dr dont le rayon varie avec z .

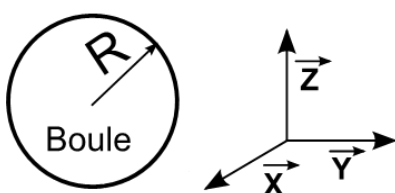
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{20}M(R^2 + 4H^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}M(R^2 + 4H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{bmatrix}_{G,z}$$

Sphère en G

Rayon R constant et épaisseur négligeable

Calcul en G : $A + B + C = 3A = 2 \cdot \int_S r^2 dm = 2 M R^2$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}MR^2 \end{bmatrix}_G$$

Boule en GRayon R (Idem Sphère et utiliser une sphère creuse d'épaisseur dr).

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}MR^2 \end{bmatrix}_G$$

2.7. Théorème de Huygens

Ce théorème donne la relation existante entre $[I_G(S)]$, matrice d'inertie du solide S au centre de gravité G , et $[I_Q(S)]$, matrice d'inertie en un point Q quelconque tel que $\overrightarrow{QG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

$$[I_Q(S)] = [I_G(S)] + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

Donc, la matrice d'inertie en un point quelconque Q est la somme de la matrice d'inertie exprimée en G et de la matrice d'inertie en G "du point Q affecté de la masse totale".

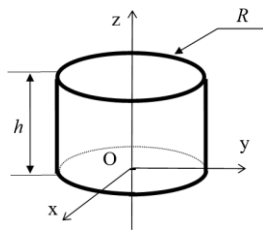
Remarque : Pour mémoriser, on peut se rappeler de la formule suivante :

$$[I_Q(S)] = [I_G(S)] + m [\overrightarrow{QG}^2]$$

ATTENTION : Cette relation n'est valable qu'entre G et un autre point !!!

Remarque : Le **déplacement** de matrice ne s'utilise que pour pouvoir **trouver la matrice d'un solide constitué de volumes élémentaires** ET/OU dans le cas où l'on déplace en un **point du solide qui reste fixe** au cours du mouvement.

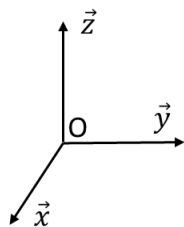
Exemple :



$$\begin{pmatrix} m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{-, -, z}$$

2.8. Cas d'un solide complexe composé de solides élémentaires

Il peut être intéressant dans certains cas de faire une partition d'un solide en solides élémentaires dont les matrices d'inertie sont simples à calculer ou connues.



$$\Sigma = S_1 + S_2 - S_3$$

$$[I_O(\Sigma)]_R = [I_O(S_1)]_R + [I_O(S_2)]_R - [I_O(S_3)]_R$$

Attention : Il est possible de **sommer les matrices d'inertie** au **même point** et dans le **même repère**.

3. Torseur cinétique (quantités de mouvements)

$$\{C(S/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_c(S/R_g)} \\ \overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \\ \int_S \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Résultante cinétique} \\ \text{Moment cinétique en } Q \end{array}$$

3.1. Résultante cinétique (résultante du torseur)

$$\overrightarrow{R_c(S/R_g)} = M_S \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}$$

$\overrightarrow{R_c(S/R_g)}$ ne dépend que de G, c'est un invariant vectoriel, caractéristique d'une résultante de torseur.

1.1. Moment cinétique (moment du torseur)

$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_g)} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_g)} + \overrightarrow{\sigma(B, S/R_g)}$$

$\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)}$ est bien un champ de moment d'un torseur.

Ou encore, avec une forme faisant intervenir la matrice d'inertie :

$$\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} = M_S \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} + [I_Q(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}})$$

Cas particuliers :

$$Q \text{ fixe dans } R_g \rightarrow \overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} = [I_Q(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}})$$

$$G = Q \rightarrow \overrightarrow{\sigma(G, S/R_g)} = [I_G(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}})$$

Remarques :

- Dans la plupart des calculs, nous essaierons de nous placer au point G pour des soucis de simplification de l'expression du moment cinétique
- Dans le cas où **Q appartient au solide** et est fixe, il faudra utiliser les méthodes précédentes pour les changements de point (Théorème de Huygens, ...)
- Si le moment cinétique doit être déterminé en A alors que l'opérateur d'inertie est donné en Q : on calcule le moment cinétique là où on connaît l'opérateur d'inertie, ici en Q puis on réduit le moment cinétique en A par la relation de moment. On obtient alors la relation générale suivante :

$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_g)} = M_S \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} + [I_Q(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}) + \overrightarrow{AQ} \wedge M_S \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}$$