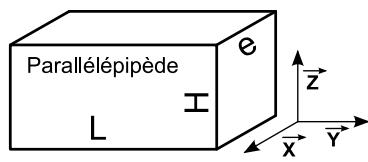


TD – Robot 4 axes

POINT METHODE :

- Forme des matrices d'inertie (**Q1**) :

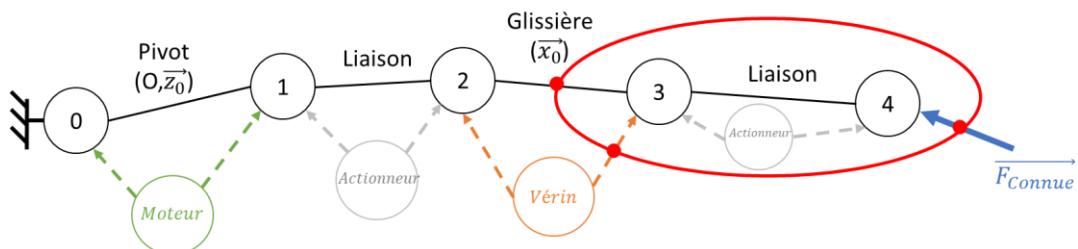


Deux Plans de symétrie ((Q, \vec{x}, \vec{y}) et (Q, \vec{x}, \vec{z})) :

$$D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Q_{xyz}}$$

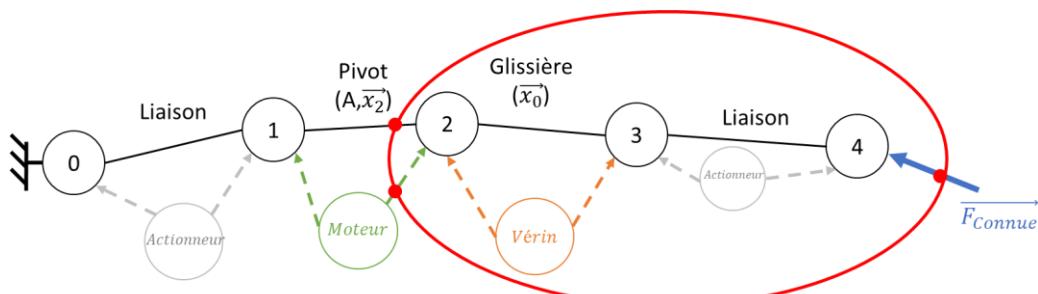
- Stratégie de résolution pour un système en chaîne ouverte (**Q2**) :

- Détermination de l'effort fourni par un vérin :



- Isolement de {3+4}
- BAME
- TRD suivant \vec{x}_0

- Détermination du couple fourni par un moteur :



- Isolement de {2+3+4}
- BAME
- TMD en A suivant \vec{x}_2

- Calcul de la projection de $\overrightarrow{\delta(Q, S/R_g)}$ sur un axe \vec{u} (**Q3/Q4**) :

$$\overrightarrow{\delta(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u} = \frac{d\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)}}{dt} \cdot \vec{u} + M_S ((\overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}) \cdot \vec{u})$$

ou

$$\overrightarrow{\delta(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u} = \frac{d(\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u})}{dt} - \overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + M_S ((\overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}) \cdot \vec{u})$$

Si \vec{u} est un vecteur fixe, on obtient :

$$\overrightarrow{\delta(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u} = \frac{d(\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u})}{dt} + M_S ((\overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}) \cdot \vec{u})$$

- Calcul du moment dynamique $\overrightarrow{\delta(A, S/R_g)}$ (**Q3/Q4**) :

- Les matrices sont données en G_i .
- A n'est pas un point appartenant à 3, 4 ou 2 ET fixe/0.

➤ Déplacer les matrices

- Calculer $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_g)}$ puis déplacer pour obtenir $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_g)}$ mais A point fixe
- Calculer $\overrightarrow{\delta(G, S/R_g)}$ puis déplacer pour obtenir $\overrightarrow{\delta(A, S/R_g)}$

ELEMENTS DE CORRECTION :**Q1 :**

$$[I_{G_1}(1)]_{R_1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{G_1, R_1}$$

$$[I_{G_2}(2)]_{R_2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{G_2, R_2}$$

$$[I_C(3)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_C$$

$$[I_{G_4}(4)]_{R_2=R_4} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{G_4, R_2=R_4}$$

Q2 :

$F_{34} \rightarrow \{4\} \rightarrow TRD$ suivant $\vec{z_2}$

$$\sum \overrightarrow{R_{ext \rightarrow 4}} \cdot \vec{z_2} = m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)} \cdot \vec{z_2}$$

$$\text{D'où } F_{34} = m_4 \cdot g \cdot \cos\beta + m_4 \cdot \left. \frac{d\overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{z_2}$$

$F_{23} \rightarrow \{3 + 4\} \rightarrow TRD$ suivant $\vec{x_1}$

$$\sum \overrightarrow{R_{ext \rightarrow \{4+3\}}} \cdot \vec{x_1} = (m_3 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} + m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}) \cdot \vec{x_1}$$

$$\text{D'où } F_{34} = m_4 \cdot \left. \frac{d\overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{x_1} + m_3 \cdot \left. \frac{d\overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)}}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{x_1}$$

TEC

Il n'est pas possible ici d'utiliser le TEC, car cela va faire intervenir les efforts (qui sont inconnus) dans les liaisons lorsque l'on va calculer les puissances extérieures à notre système isolé.

Exemple : Si l'on cherche à déterminer la force du Vérin F_{23} : Ce sera l'effort de la liaison entre 2 et 3 qui nous posera un problème : $P_{ext \ 3 \leftrightarrow 2} = \{\tau_{2 \rightarrow 3}\} \otimes \{\nu_{3/0}\} \neq 0$ et cela fait intervenir les efforts (inconnus) de la liaison entre 2 et 3.

$C_{12} \rightarrow \{2 + 3 + 4\} \rightarrow TMD$ en A suivant $\vec{x_2}$

$$\sum \overrightarrow{M(A, ext \rightarrow \{2 + 3 + 4\})} \cdot \vec{x_2} = (\overrightarrow{\delta(A \in 2/0)} + \overrightarrow{\delta(A \in 3/0)} + \overrightarrow{\delta(A \in 4/0)}) \cdot \vec{x_2}$$

$A \notin 2$ ou 3 ou 4 et A n'est pas fixe donc on calcule les $\overrightarrow{\delta(G_l \in \iota/0)}$ puis on déplace en A .

$$\overrightarrow{\delta(A \in 2/0)} = \overrightarrow{\delta(G_2 \in 2/0)} + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2. \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$$

$$\overrightarrow{\delta(A \in 3/0)} = \overrightarrow{\delta(G_3 \in 3/0)} + \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3. \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)}$$

$$\overrightarrow{\delta(A \in 4/0)} = \overrightarrow{\delta(G_4 \in 4/0)} + \overrightarrow{AG_4} \wedge m_4. \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}$$

$$\text{D'où } C_{12} = -Z.m_4.g.sin\beta + \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)}}{dt} \right)_{R_0} + \overrightarrow{AG_4} \wedge m_4. \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}$$

$$+ \left. \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_3 \in 3/0)}}{dt} \right|_{R_0} + \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3. \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} + \left. \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}}{dt} \right|_{R_0} + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2. \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}. \vec{x}_1$$

$C_{01} \rightarrow \{1 + 2 + 3 + 4\} \rightarrow TMD \text{ en } 0 \text{ suivant } \vec{z}_0$

$$\sum \overrightarrow{M(O, ext \rightarrow \{1 + 2 + 3 + 4\})}. \vec{z}_0 = (\overrightarrow{\delta(O \in 1/0)} + \overrightarrow{\delta(O \in 2/0)} + \overrightarrow{\delta(O \in 3/0)} + \overrightarrow{\delta(O \in 4/0)}). \vec{z}_0$$

$O \notin 2$ ou 3 ou 4 , on calcule les $\overrightarrow{\delta(G_l \in \iota/0)}$ puis on déplace en O .

$$\text{D'où } C_{12} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)}}{dt} \right)_{R_0} + \overrightarrow{OG_4} \wedge m_4. \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)} + \left. \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_3 \in 3/0)}}{dt} \right|_{R_0}$$

$$+ \overrightarrow{OG_3} \wedge m_3. \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} + \left. \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}}{dt} \right|_{R_0} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2. \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} + \left. \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0)}}{dt} \right|_{R_0}$$

$$+ \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1. \overrightarrow{\Gamma(G_1 \in 1/0)}. \vec{z}_0$$

Q3 :

F₂₃

J'isole $\{3 + 4\}$

BAME :

$$\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \overrightarrow{V(G_3 \in 3/0)} = \left. \frac{d(H.\vec{z}_0 - e.\vec{y}_1 + (L+X).\vec{x}_1)}{dt} \right|_{R_0} = (e.\dot{\alpha} + \dot{X}).\vec{x}_1 + (L+X).\dot{\alpha}.\vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{V(G_4 \in 4/0)} = (e.\dot{\alpha} + \dot{X} + Z.\dot{\alpha}.sin\beta).\vec{x}_1 + (L+X).\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + \dot{Z}.\vec{z}_2 - Z.\dot{\beta}.\vec{y}_2$$

On dérive les deux vitesses en gardant que les composantes selon \vec{x}_1

TRD suivant \vec{x}_1

$$F_{23} = (m_4 + m_3) \cdot [e \cdot \ddot{\alpha} + \ddot{X} - (L + X) \cdot \dot{\alpha}^2] + m_4 \cdot [2 \cdot \dot{Z} \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta + 2 \cdot Z \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \cos\beta + Z \cdot \ddot{\alpha} \cdot \sin\beta]$$

$$F_{23} = 132,5 \text{ N} > 100 \text{ N} \rightarrow OK CdCF$$

C₁₂

J'isole {2 + 3 + 4}

BAME :

$$\overrightarrow{\sigma(C \in 3/0)} = [I_C(3)] \cdot \vec{0} = \vec{0} \text{ (masse ponctuelle) donc } \overrightarrow{\delta(C \in 3/0)}$$

$$\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)} = [I_{G_4}(4)] \cdot \overrightarrow{\Omega_{4/0}}$$

ATTENTION : Le vecteur rotation doit être exprimé dans la même base que la matrice d'inertie !!

$$\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \end{pmatrix} = A_4 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + B_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \vec{y}_2 + C_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \vec{z}_2$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)}}{dt} \cdot \vec{x}_1 = A_4 \cdot \ddot{\beta} + (C_4 - B_4) \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$$

$$\text{Par analogie } \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}}{dt} \cdot \vec{x}_1 = A_2 \cdot \ddot{\beta} + (C_2 - B_2) \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$$

TMD en A suivant $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$

$$\begin{aligned} C_{12} = & -Z \cdot m_4 \cdot g \cdot \sin\beta + (A_2 + A_4) \cdot \ddot{\beta} + (C_2 + C_4 - B_2 - B_4) \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \\ & + m_4 [2 \cdot Z \cdot \dot{Z} \cdot \dot{\beta} + Z^2 \cdot \ddot{\beta} - Z^2 \cdot \dot{\beta}^2 \\ & - (Z \cdot e \cdot \dot{\alpha}^2 + 2 \cdot Z \cdot \dot{X} \cdot \dot{\alpha} + Z^2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin\beta + Z \cdot (L + X) \cdot \ddot{\alpha}) \cos\beta] \end{aligned}$$

$$C_{12} = 147,9 \text{ N.m} \rightarrow Force = \frac{C_{12}}{L+X_{max}} = 128 \text{ N} > 100 \text{ N} \rightarrow OK CdCF$$

Q4 :**F₃₄**

J'isole {4}

BAME :

$$\overrightarrow{V(G_4 \in 4/0)} = (e \cdot \dot{\alpha} + \dot{X} + Z \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta) \cdot \vec{x}_1 + (L + X) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + \dot{Z} \cdot \vec{z}_2 - Z \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2$$

On dérive la vitesse en gardant que les composantes selon \vec{z}_2 TRD suivant \vec{z}_2

$$F_{34} = m_4 [g \cdot \cos\beta - ((e + Z \cdot \sin\beta) \cdot \dot{\alpha}^2 + 2 \cdot \dot{X} \cdot \dot{\alpha} + (L + X) \cdot \ddot{\alpha}) \cdot \sin\beta + \dot{Z} - Z \cdot \dot{\beta}^2]$$

C₀₁

J'isole $\{1 + 2 + 3 + 4\}$

BAME :

$$\begin{aligned} C_{01} = & \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0) \cdot z_0}}{dt} + \overrightarrow{OG_4} \wedge m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)} \\ & + \frac{d\overrightarrow{\sigma(C \in 3/0) \cdot z_0}}{dt} + \overrightarrow{OC} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{\Gamma(C \in 3/0)} \\ & + \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0) \cdot z_0}}{dt} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \\ & + \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0) \cdot z_0}}{dt} + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_1 \in 1/0)} \end{aligned}$$

- $\overrightarrow{\sigma(C \in 3/0)} = \vec{0}$ (masse ponctuelle)
- $\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0) \cdot z_0} = \ddot{\alpha} \cdot (B_2 \cdot \sin^2 \beta + C_2 \cdot \cos^2 \beta)$

$$\text{Donc } \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0) \cdot z_0}}{dt} = \ddot{\alpha} \cdot (B_2 \cdot \sin^2 \beta + C_2 \cdot \cos^2 \beta) + 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta (B_2 - C_2)$$

- Par analogie $\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0) \cdot z_0}}{dt} = \ddot{\alpha} \cdot (B_4 \cdot \sin^2 \beta + C_4 \cdot \cos^2 \beta) + 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta (B_4 - C_4)$
- $\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0)} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = C_1 \cdot \dot{\alpha}$ Donc $\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0) \cdot z_0}}{dt} = C_1 \cdot \ddot{\alpha}$

TMD en 0 suivant $\overrightarrow{z_0}$

$$\begin{aligned} C_{01} = & \ddot{\alpha} \cdot (C_1 + (B_2 + B_4) \cdot \sin^2 \beta + (C_2 + C_4) \cdot \cos^2 \beta) + 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot (B_2 + B_4 - C_2 - C_4) \\ & + m_2 \cdot \ddot{\alpha} \cdot (e^2 + l_2^2) + m_3 \cdot (e^2 \cdot \dot{\alpha} + e \cdot \ddot{X} - e \cdot (L + X) \cdot \dot{\alpha}^2 + (L + X) \cdot (e \cdot \dot{\alpha}^2 + 2 \cdot \ddot{X} \cdot \dot{\alpha})) \\ & + (L + X) \cdot \ddot{\alpha} + (\overrightarrow{OG_4} \wedge m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}) \cdot \overrightarrow{z_0} = \dots \end{aligned}$$

Q5 :

Le couplage provient du fait qu'aucun actionneur n'est indépendant des autres... (tous contiennent des termes associés aux accélérations provoquées par les autres actionneurs).