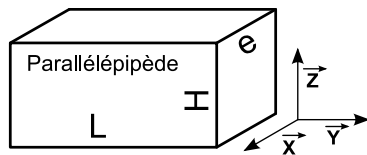


## TD – Robot 4 axes

### POINT METHODE :

- Forme des matrices d'inertie (**Q1**) :

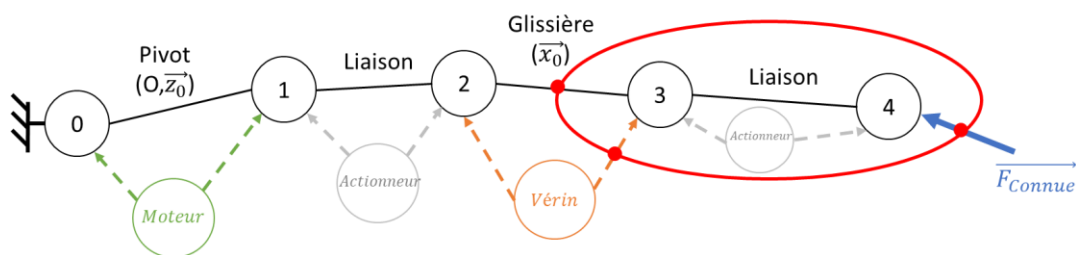


Deux Plans de symétrie  $(Q, \vec{x}, \vec{y})$  et  $(Q, \vec{x}, \vec{z})$  :

$$D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qxyz}$$

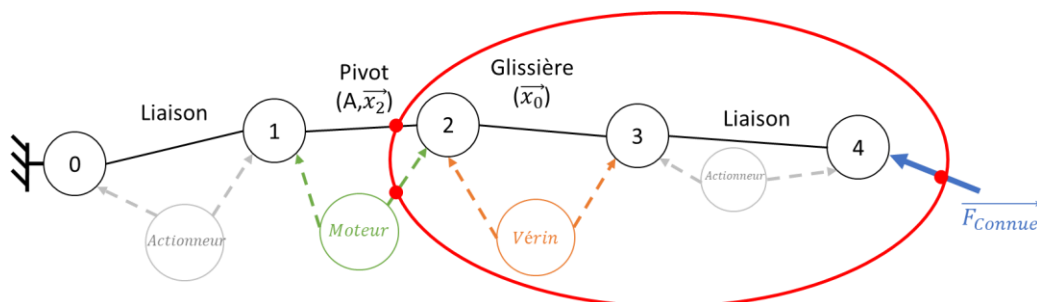
- Stratégie de résolution pour un système en chaîne ouverte (**Q2**) :

- Détermination de l'effort fourni par un vérin :



- Isolement de {3+4}
    - BAME
    - TRD suivant  $\vec{x}_0$

- Détermination du couple fourni par un moteur :



- Isolement de {2+3+4}
    - BAME
    - TMD en A suivant  $\vec{x}_2$



- Calcul de la projection de  $\overrightarrow{\delta(Q, S/R_g)}$  sur un axe  $\vec{u}$  (Q3/Q4) :

$$\overrightarrow{\delta(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u} = \frac{d\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u}}{dt} + M_S ((\overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)})) \cdot \vec{u}$$

ou

$$\overrightarrow{\delta(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u} = \frac{d(\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u})}{dt} - \overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + M_S ((\overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)})) \cdot \vec{u}$$

Si  $\vec{u}$  est un vecteur fixe, on obtient :

$$\overrightarrow{\delta(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u} = \frac{d(\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \cdot \vec{u})}{dt} + M_S ((\overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)})) \cdot \vec{u}$$

- Calcul du moment dynamique  $\overrightarrow{\delta(A, S/R_g)}$  (Q3/Q4) :
  - Les matrices sont données en  $G_i$ .
  - A n'est pas un point appartenant à 3, 4 ou 2 ET fixe/0.
    - —Déplacer les matrices
    - Calculer  $\overrightarrow{\sigma(G, S/R_g)}$  puis déplacer pour obtenir  $\overrightarrow{\sigma(A, S/R_g)}$  mais A ~~point fixe~~
    - Calculer  $\overrightarrow{\delta(G, S/R_g)}$  puis déplacer pour obtenir  $\overrightarrow{\delta(A, S/R_g)}$



## ELEMENTS DE CORRECTION :

### Q1 :

$$[I_{G_1}(1)]_{R_1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{G_1, R_1}$$

$$[I_{G_2}(2)]_{R_2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{G_2, R_2}$$

$$[I_C(3)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_C$$

$$[I_{G_4}(4)]_{R_2=R_4} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{G_4, R_2=R_4}$$

### Q2 :

$F_{34} \rightarrow \{4\} \rightarrow TRD \text{ suivant } \vec{z}_2$

$$\sum \overrightarrow{R_{ext \rightarrow 4}} \cdot \vec{z}_2 = m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)} \cdot \vec{z}_2$$

$$D'où F_{34} = m_4 \cdot g \cdot \cos\beta + m_4 \cdot \left. \frac{dV(G_4 \in 4/0)}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{z}_2$$

$F_{23} \rightarrow \{3 + 4\} \rightarrow TRD \text{ suivant } \vec{x}_1$

$$\sum \overrightarrow{R_{ext \rightarrow \{3+4\}}} \cdot \vec{x}_1 = (m_3 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} + m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}) \cdot \vec{x}_1$$

$$D'où F_{34} = m_4 \cdot \left. \frac{dV(G_4 \in 4/0)}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{x}_1 + m_3 \cdot \left. \frac{dV(C \in 3/0)}{dt} \right|_{R_0} \cdot \vec{x}_1$$

### TEC

Il n'est pas possible ici d'utiliser le TEC, car cela va faire intervenir les efforts (qui sont inconnus) dans les liaisons lorsque l'on va calculer les puissances extérieures à notre système isolé.

Exemple : Si l'on cherche à déterminer la force du Vérin  $F_{23}$  : Ce sera l'effort de la liaison entre 2 et 3 qui nous posera un problème :  $P_{ext \ 3 \leftrightarrow 2} = \{\tau_{2 \rightarrow 3}\} \otimes \{v_{3/0}\} \neq 0$  et cela fait intervenir les efforts (inconnus) de la liaison entre 2 et 3.

$C_{12} \rightarrow \{2 + 3 + 4\} \rightarrow TMD \text{ en A suivant } \vec{x}_2$

$$\sum \overrightarrow{M(A, ext \rightarrow \{2 + 3 + 4\})} \cdot \vec{x}_2 = (\overrightarrow{\delta(A \in 2/0)} + \overrightarrow{\delta(A \in 3/0)} + \overrightarrow{\delta(A \in 4/0)}) \cdot \vec{x}_2$$



A  $\notin$  2 ou 3 ou 4 et A n'est pas fixe donc on calcule les  $\overrightarrow{\delta(G_i \in i/0)}$  puis on déplace en A.

$$\overrightarrow{\delta(A \in 2/0)} = \overrightarrow{\delta(G_2 \in 2/0)} + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)}$$

$$\overrightarrow{\delta(A \in 3/0)} = \overrightarrow{\delta(C \in 3/0)} + \overrightarrow{AC} \wedge m_3 \cdot \overrightarrow{\Gamma(C \in 3/0)}$$

$$\overrightarrow{\delta(A \in 4/0)} = \overrightarrow{\delta(G_4 \in 4/0)} + \overrightarrow{AG_4} \wedge m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } C_{12} = & -Z \cdot m_4 \cdot g \cdot \sin\beta + \left( \frac{d\sigma(G_4 \in 4/0)}{dt} \right) \Big|_{R_0} + \overrightarrow{AG_4} \wedge m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)} \\ & + \left( \frac{d\sigma(G_3 \in 3/0)}{dt} \right) \Big|_{R_0} + \overrightarrow{AG_3} \wedge m_3 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} + \left( \frac{d\sigma(G_2 \in 2/0)}{dt} \right) \Big|_{R_0} + \overrightarrow{AG_2} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \Big|_{R_0} \cdot \vec{x}_1 \end{aligned}$$

$C_{01} \rightarrow \{1 + 2 + 3 + 4\} \rightarrow TMD \text{ en } O \text{ suivant } \vec{z}_0$

$$\sum \overrightarrow{M(O, ext \rightarrow \{1 + 2 + 3 + 4\})} \cdot \vec{z}_0 = (\overrightarrow{\delta(O \in 1/0)} + \overrightarrow{\delta(O \in 2/0)} + \overrightarrow{\delta(O \in 3/0)} + \overrightarrow{\delta(O \in 4/0)}) \cdot \vec{z}_0$$

O  $\notin$  2 ou 3 ou 4, on calcule les  $\overrightarrow{\delta(G_i \in i/0)}$  puis on déplace en O.

$$\begin{aligned} \text{D'où } C_{12} = & \left( \frac{d\sigma(G_4 \in 4/0)}{dt} \right) \Big|_{R_0} + \overrightarrow{OG_4} \wedge m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)} + \left( \frac{d\sigma(G_3 \in 3/0)}{dt} \right) \Big|_{R_0} \\ & + \overrightarrow{OG_3} \wedge m_3 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/0)} + \left( \frac{d\sigma(G_2 \in 2/0)}{dt} \right) \Big|_{R_0} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} + \left( \frac{d\sigma(G_1 \in 1/0)}{dt} \right) \Big|_{R_0} \\ & + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_1 \in 1/0)} \Big|_{R_0} \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

### **Q3 :**

**F<sub>23</sub>**

J'isole {3 + 4}

BAME : .....

$$\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \overrightarrow{V(G_3 \in 3/0)} = \frac{d(H \cdot \vec{z}_0 - e \cdot \vec{y}_1 + (L+X) \cdot \vec{x}_1)}{dt} \Big|_{R_0} = (e \cdot \dot{\alpha} + \dot{X}) \cdot \vec{x}_1 + (L+X) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{V(G_4 \in 4/0)} = (e \cdot \dot{\alpha} + \dot{X} + Z \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta) \cdot \vec{x}_1 + (L+X) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + \dot{Z} \cdot \vec{z}_2 - Z \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2$$

On dérive les deux vitesses en gardant que les composantes selon  $\vec{x}_1$

TRD suivant  $\vec{x}_1$



$$F_{23} = (m_4 + m_3) \cdot [e \cdot \ddot{\alpha} + \ddot{X} - (L + X) \cdot \dot{\alpha}^2] + m_4 \cdot [2 \cdot \dot{Z} \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta + 2 \cdot Z \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \cos\beta + Z \cdot \ddot{\alpha} \cdot \sin\beta]$$

$$F_{23} = 132,5 \text{ N} > 100 \text{ N} \rightarrow OK \text{ CdCF}$$

## C<sub>12</sub>

J'isole {2 + 3 + 4}

BAME : .....

$$\overrightarrow{\sigma(C \in 3/0)} = [I_C(3)] \cdot \vec{0} = \vec{0} \text{ (masse ponctuelle) donc } \overrightarrow{\delta(C \in 3/0)}$$

$$\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)} = [I_{G_4}(4)] \cdot \overrightarrow{\Omega_{4/0}}$$

**ATTENTION :** Le vecteur rotation doit être exprimé dans la même base que la matrice d'inertie !!

$$\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)} = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin\beta \\ \dot{\alpha} \cos\beta \end{pmatrix} = A_4 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + B_4 \cdot \dot{\alpha} \sin\beta \cdot \vec{y}_2 + C_4 \cdot \dot{\alpha} \cos\beta \cdot \vec{z}_2$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)}}{dt} \cdot \vec{x}_1 = A_4 \cdot \ddot{\beta} + (C_4 - B_4) \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$$

$$\text{Par analogie } \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)}}{dt} \cdot \vec{x}_1 = A_2 \cdot \ddot{\beta} + (C_2 - B_2) \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$$

$$TMD \text{ en } A \text{ suivant } \vec{x}_2 = \vec{x}_1$$

$$C_{12} = -Z \cdot m_4 \cdot g \cdot \sin\beta + (A_2 + A_4) \cdot \ddot{\beta} + (C_2 + C_4 - B_2 - B_4) \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \\ + m_4 [2 \cdot Z \cdot \dot{Z} \cdot \dot{\beta} + Z^2 \cdot \ddot{\beta} - Z^2 \cdot \dot{\beta}^2 \\ - (Z \cdot e \cdot \dot{\alpha}^2 + 2 \cdot Z \cdot \dot{X} \cdot \dot{\alpha} + Z^2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin\beta + Z \cdot (L + X) \cdot \ddot{\alpha}) \cos\beta]$$

$$C_{12} = 147,9 \text{ N} \cdot \text{m} \rightarrow \text{Force} = \frac{C_{12}}{L + X_{\max}} = 128 \text{ N} > 100 \text{ N} \rightarrow OK \text{ CdCF}$$

## Q4 :

### F<sub>34</sub>

J'isole {4}

BAME : .....

$$\overrightarrow{V(G_4 \in 4/0)} = (e \cdot \dot{\alpha} + \dot{X} + Z \cdot \dot{\alpha} \sin\beta) \cdot \vec{x}_1 + (L + X) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + \dot{Z} \cdot \vec{z}_2 - Z \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2$$

On dérive la vitesse en gardant que les composantes selon  $\vec{z}_2$

TRD suivant  $\vec{z}_2$

$$F_{34} = m_4 \left[ g \cdot \cos\beta - ((e + Z \cdot \sin\beta) \cdot \dot{\alpha}^2 + 2 \cdot \dot{X} \cdot \dot{\alpha} + (L + X) \cdot \ddot{\alpha}) \cdot \sin\beta + \ddot{Z} - Z \cdot \dot{\beta}^2 \right]$$



**C<sub>01</sub>**

J'isole {1 + 2 + 3 + 4}

BAME : .....

$$\begin{aligned} C_{01} = & \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}}{dt} + \overrightarrow{OG_4} \wedge m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)} \\ & + \frac{d\overrightarrow{\sigma(C \in 3/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}}{dt} + \overrightarrow{OC} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{\Gamma(C \in 3/0)} \\ & + \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}}{dt} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/0)} \\ & + \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}}{dt} + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 1/0)} \end{aligned}$$

- $\overrightarrow{\sigma(C \in 3/0)} = \vec{0}$  (masse ponctuelle)
- $\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)} \cdot \overrightarrow{z_0} = \dot{\alpha} \cdot (B_2 \cdot \sin^2 \beta + C_2 \cdot \cos^2 \beta)$

$$\text{Donc } \frac{d\overrightarrow{\sigma(G_2 \in 2/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}}{dt} = \ddot{\alpha} \cdot (B_2 \cdot \sin^2 \beta + C_2 \cdot \cos^2 \beta) + 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta (B_2 - C_2)$$

- Par analogie  $\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_4 \in 4/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}}{dt} = \ddot{\alpha} \cdot (B_4 \cdot \sin^2 \beta + C_4 \cdot \cos^2 \beta) + 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta (B_4 - C_4)$
- $\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0)} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = C_1 \cdot \dot{\alpha}$  Donc  $\frac{d\overrightarrow{\sigma(G_1 \in 1/0)} \cdot \overrightarrow{z_0}}{dt} = C_1 \cdot \ddot{\alpha}$

TMD en 0 suivant  $\overrightarrow{z_0}$

$$\begin{aligned} C_{01} = & \ddot{\alpha} \cdot (C_1 + (B_2 + B_4) \cdot \sin^2 \beta + (C_2 + C_4) \cdot \cos^2 \beta) + 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot (B_2 + B_4 - C_2 - C_4) \\ & + m_2 \cdot \ddot{\alpha} \cdot (e^2 + l_2^2) + m_3 \cdot (e^2 \cdot \ddot{\alpha} + e \cdot \ddot{X} - e \cdot (L + X) \cdot \dot{\alpha}^2 + (L + X) \cdot (e \cdot \dot{\alpha}^2 + 2 \cdot \dot{X} \cdot \dot{\alpha})) \\ & + (L + X) \cdot \ddot{\alpha} + (\overrightarrow{OG_4} \wedge m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma(G_4 \in 4/0)}) \cdot \overrightarrow{z_0} = \dots \end{aligned}$$

**Q5 :**

Le couplage provient du fait qu'aucun actionneur n'est indépendant des autres... (tous contiennent des termes associés aux accélérations provoquées par les autres actionneurs).