Dynamique du Solide

Dynamique du Solide

Compétences attendues :

- ✓ Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
- ✓ Proposer une démarche permettant la détermination d’une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- ✓ Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
- ✓ Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

Torseur dynamique (quantités d'accélérations)

On définit le torseur dynamique du solide S par rapport à R_g au point Q :

$$\{T_d(S/R_g)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d(S/R_g)} \\ \overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)} \end{Bmatrix}_Q = \begin{Bmatrix} \int_S \overrightarrow{\Gamma(P\in S/R_g)}\,dm(P) \\ \int_S \overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{\Gamma(P\in S/R_g)}\,dm(P) \end{Bmatrix}_Q \begin{matrix} \textit{Résultante dynamique} \\ \textit{Moment dynamique en } Q \end{matrix}$$

Torseur dynamique (quantités d'accélérations)

Résultante dynamique

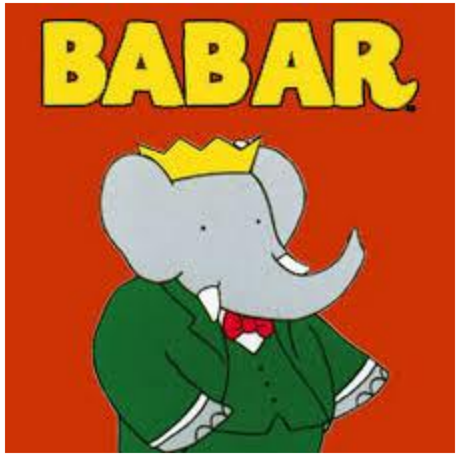
$$\overrightarrow{R_d(S/R_g)} = M_S\,\overrightarrow{\Gamma(G \in S/R_g)}$$

$\overrightarrow{R_d(S/Rg)}$ est un invariant vectoriel, caractéristique de la résultante d'un torseur.

Torseur dynamique (quantités d'accélérations)

Moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)} = \overrightarrow{\delta(B,S/R_g)} + \overrightarrow{QB} \wedge \overrightarrow{R_d(S/R_g)}$$



$\overrightarrow{\delta(Q,S/Rg)}$ est le champ de <u>moment</u> d'un torseur.

Torseur dynamique (quantités d'accélérations)

Calcul des quantités d'accélération

$$\overrightarrow{R_d(S/R_g)} = \frac{d\,\overrightarrow{R_c(S/R_g)}}{dt}$$

$$\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)} = \frac{d\,\overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}}{dt} + M_S\,\overrightarrow{V(Q/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}$$

Remarque :

- La vitesse au point Q est calculée comme s'il n'appartenait pas à S.
- ~~formule simple~~ → calcul du moment dynamique d'un solide → **on calcule en général le moment cinétique puis on dérive**.

Torseur dynamique (quantités d’accélérations)

Cas particulier

$$\boldsymbol{Q\ fixe\ dans\ R_g} \rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{\delta(Q,S/R_g)}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left[\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma(Q,S/R_g)}}\right]$$

$$\boldsymbol{G = Q} \rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{\delta(G,S/R_g)}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left[\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma(G,S/R_g)}}\right]$$

<u>Remarque :</u> Intérêt de se placer en G ou en un point Q fixe dans R_g.

Torseur dynamique (quantités d'accélérations)

Remarque : calcul d'une projection sur un axe

$$\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)}.\vec{u} = \frac{d\overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}}{dt}.\vec{u} + M_S\,((\overrightarrow{V(Q/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}).\vec{u}$$

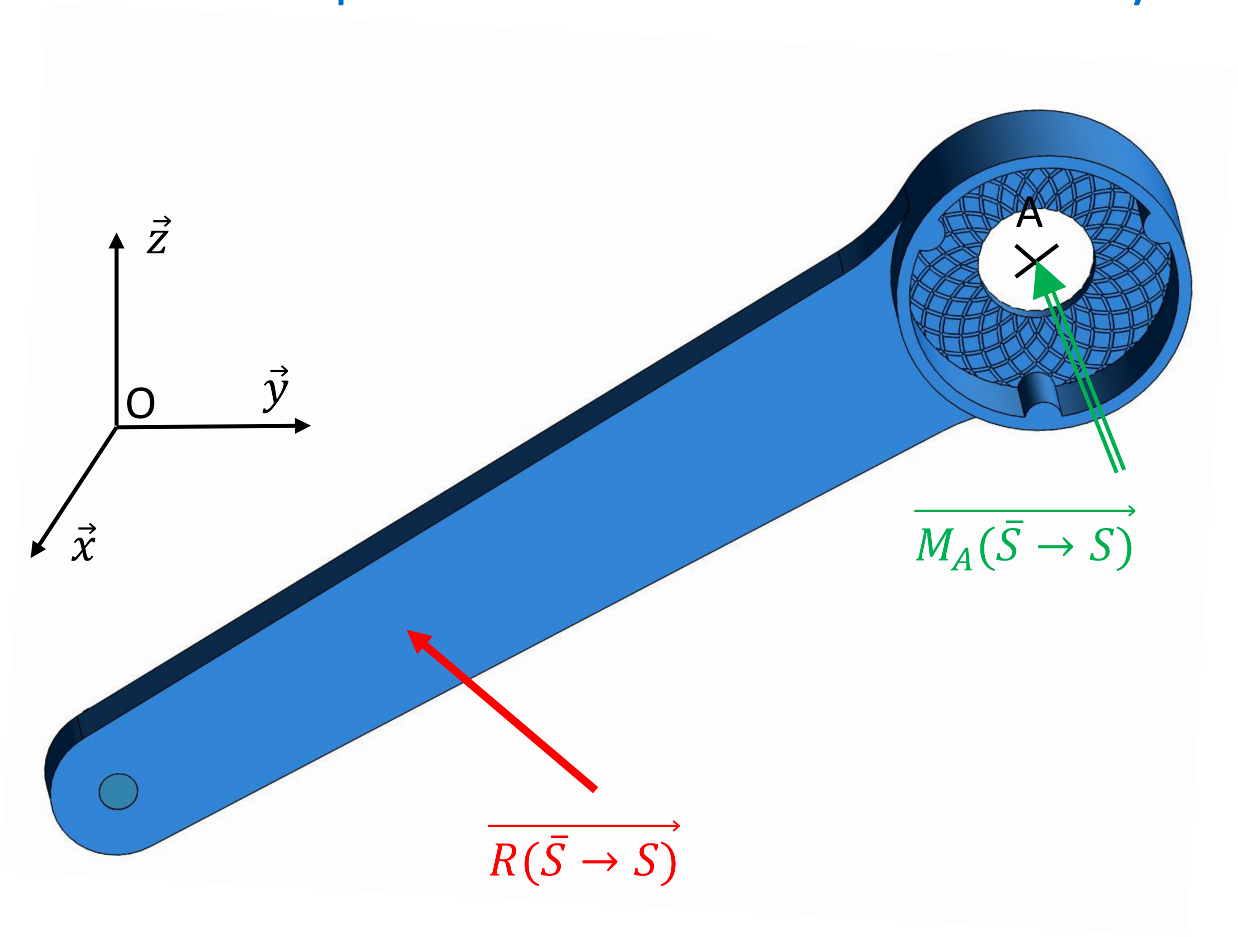
$$\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)}.\vec{u} = \frac{d(\overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}.\vec{u})}{dt} - \overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}.\frac{d\vec{u}}{dt} + M_S\,((\overrightarrow{V(Q/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}).\vec{u}$$

Vecteur $\vec{u}$ constant

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)}.\vec{u} = \frac{d(\overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}.\vec{u})}{dt} + M_S\,((\overrightarrow{V(Q/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}).\vec{u}}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

Principe fondamental de la dynamique appliqué à 1 solide



- Soit S un solide en mouvement par rapport à un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

- S est soumis à des actions mécaniques ***extérieures*** :

$$\{\tau(\bar{S} \to S)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(\bar{S} \to S)} \\ \overrightarrow{M_A(\bar{S} \to S)} \end{Bmatrix}_A$$

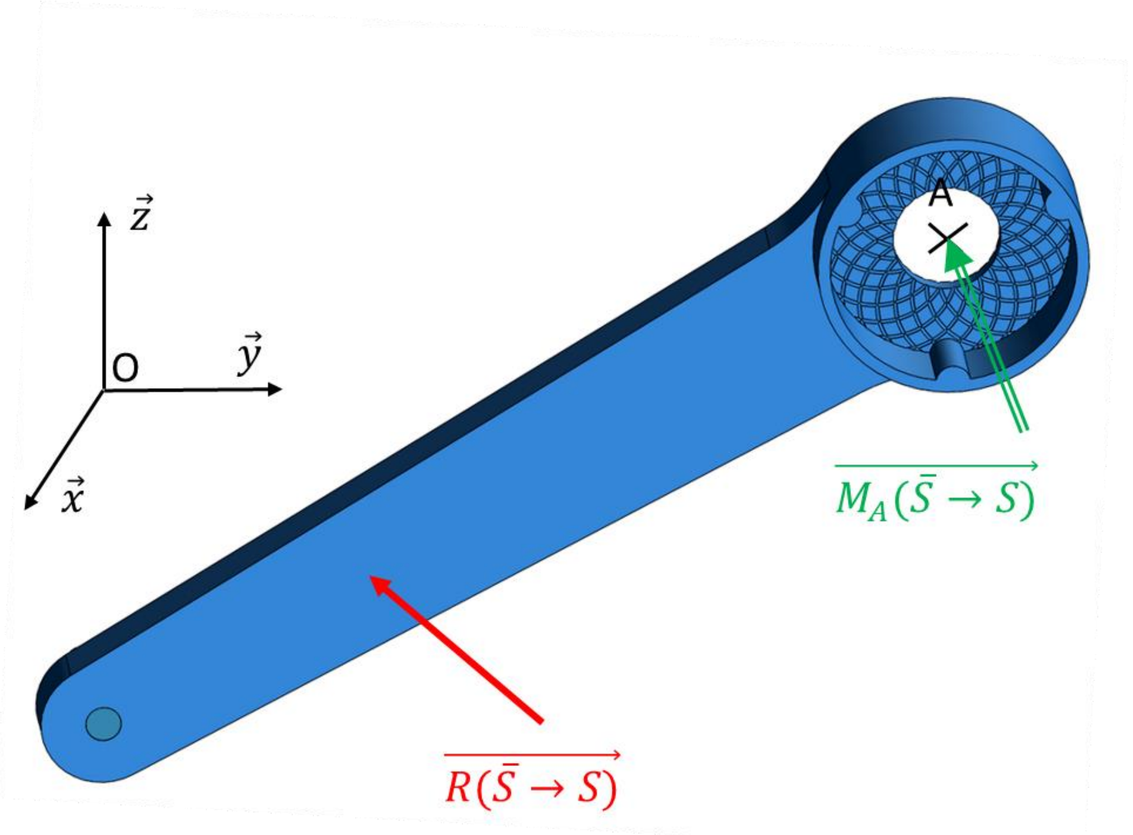
Principe Fondamental de la Dynamique

Principe fondamental de la dynamique appliqué à 1 solide

Il existe au moins un repère R_g, appelé repère galiléen tel que le torseur des actions mécaniques *<u>extérieures</u>* appliquées à S (défini en un point A) soit égal au torseur dynamique du mouvement de S par rapport à R_g (défini lui aussi au point A).

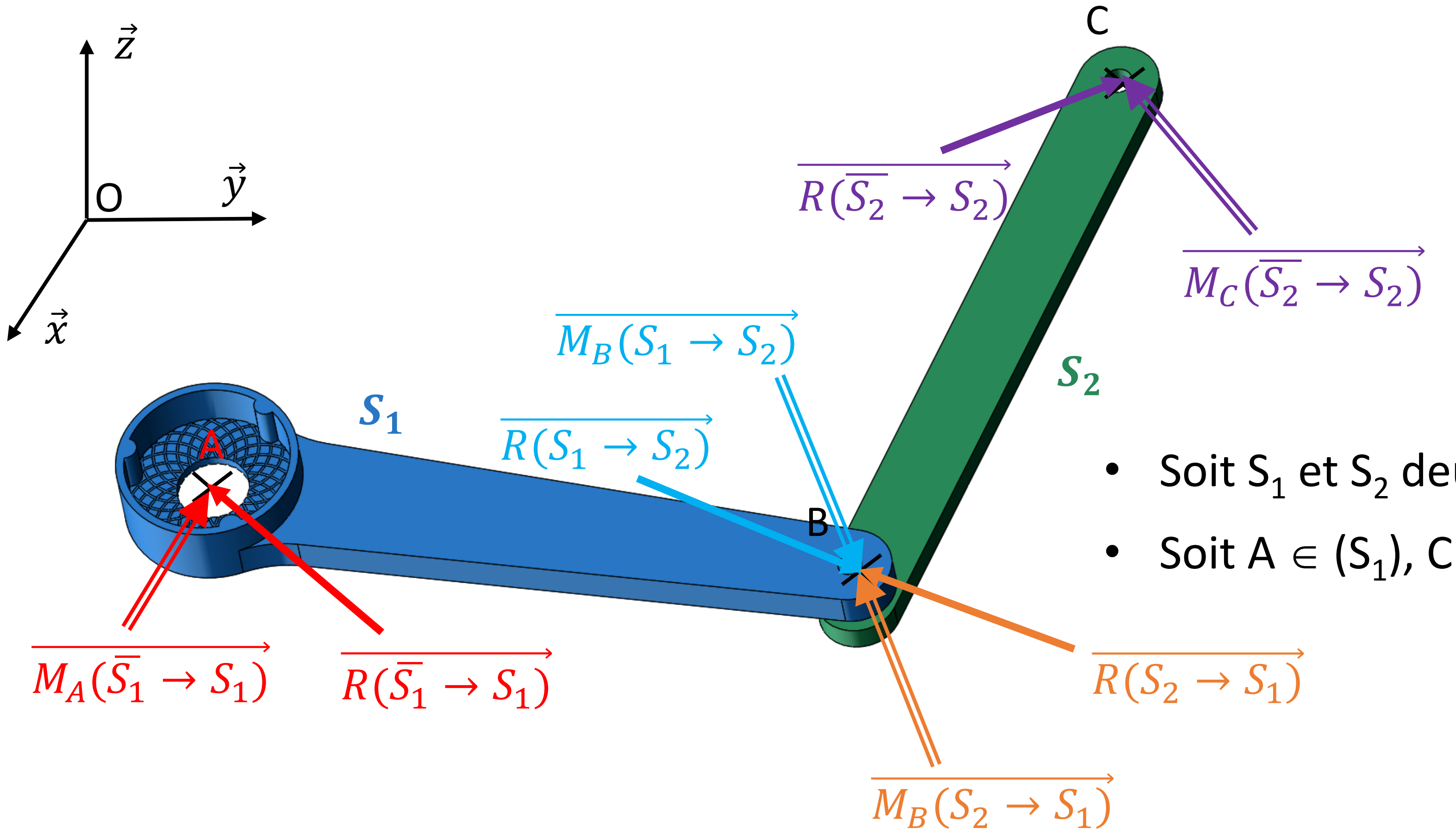
$$\{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\} = \{D(S/R_g)\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R(\bar{S} \rightarrow S)} \\ \overrightarrow{M_A(\bar{S} \rightarrow S)} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} m\overrightarrow{\Gamma_{G}(S/R_g)} \\ \overrightarrow{\delta_A(S/R_g)} \end{matrix}\right\}_A$$



Principe Fondamental de la Dynamique

Principe fondamental de la dynamique appliqué à plusieurs solides : (Théorème des actions réciproques)



- Soit S_1 et S_2 deux solides appartenant à un ensemble Σ.
- Soit $A \in (S_1)$, $C \in (S_2)$ et $B \in (S_1) \cap (S_2)$.

Principe Fondamental de la Dynamique

Principe fondamental de la dynamique appliqué à plusieurs solides : (Théorème des actions réciproques)

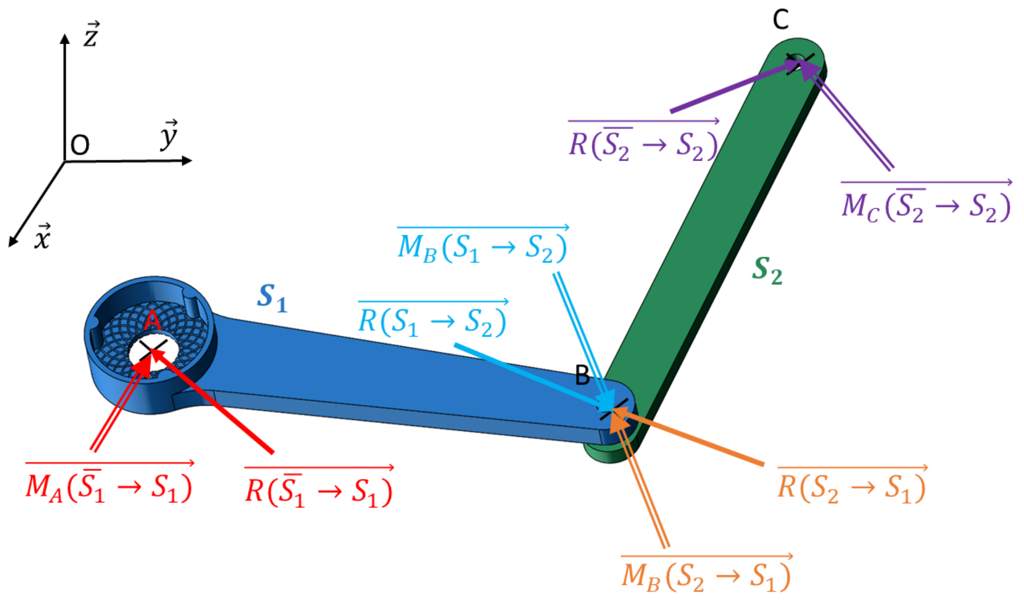
On isole S_1. Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur S_1 :

$$\{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \rightarrow S_1)} \\ \overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma} \rightarrow S_1)} \end{Bmatrix}_A$$

torseur résultant des actions mécaniques ***extérieures*** à (Σ) appliquées sur (S_1).

$$\{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(S_2 \rightarrow S_1)} \\ \overrightarrow{M_B(S_2 \rightarrow S_1)} \end{Bmatrix}_B$$

torseur des actions mécaniques ***intérieures*** à (Σ) appliquées par (S_2) sur (S_1).



Principe Fondamental de la Dynamique

Principe fondamental de la dynamique appliqué à plusieurs solides : (Théorème des actions réciproques)

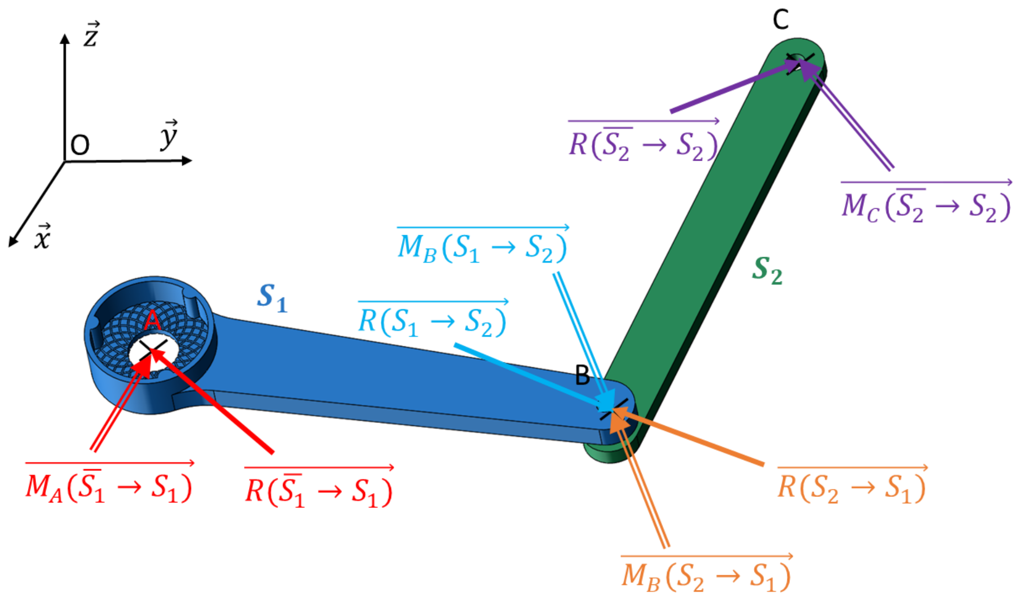
On isole S_2. Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur S_2 :

$$\{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2)} \\ \overrightarrow{M_C(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2)} \end{Bmatrix}_C$$

torseur résultant des actions mécaniques ***extérieures*** à (Σ) appliquées sur (S_2).

$$\{\tau(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(S_1 \rightarrow S_2)} \\ \overrightarrow{M_B(S_1 \rightarrow S_2)} \end{Bmatrix}_B$$

torseur des actions mécaniques ***intérieures*** à (Σ) appliquées par (S_1) sur (S_2).



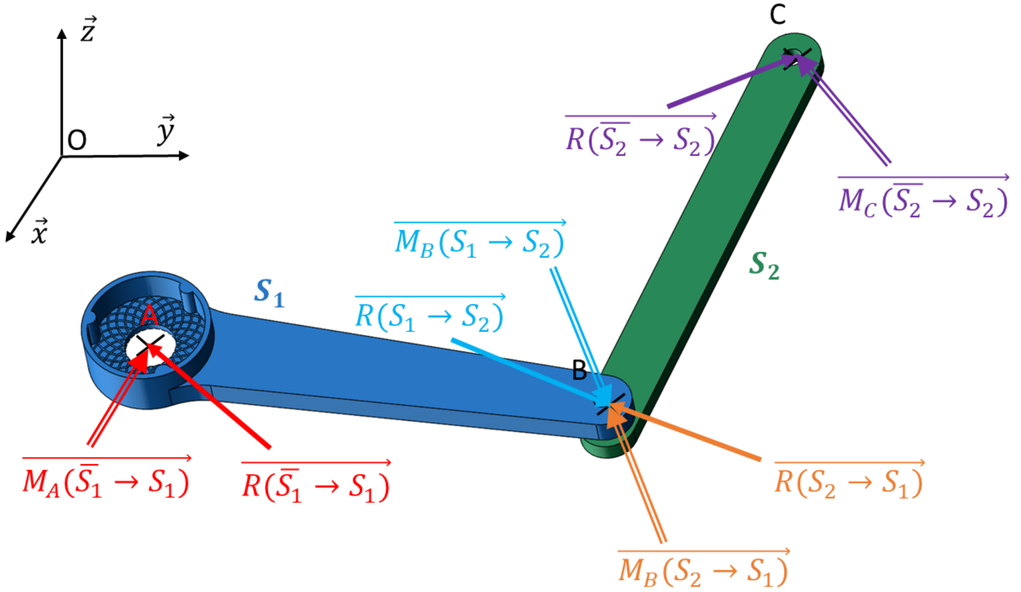
Principe Fondamental de la Dynamique

Principe fondamental de la dynamique appliqué à plusieurs solides : (Théorème des actions réciproques)

On isole $\Sigma = S_1 \cup S_2$. Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur Σ :

$$\{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_1)\} + \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2)\}$$

torseur résultant des actions mécaniques ***extérieures*** à (Σ) appliquées sur (S_1 et S_2).



Principe Fondamental de la Dynamique

Principe fondamental de la dynamique appliqué à plusieurs solides : (Théorème des actions réciproques)

- **On applique le PFD à S_1 :**

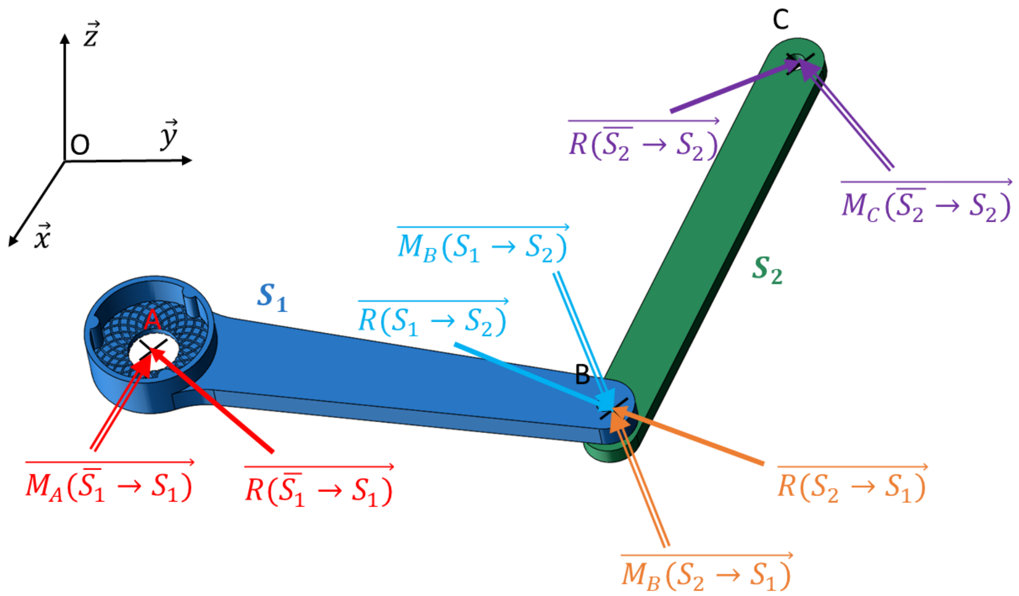
$$\{D(S_1/R_g)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_1)\} + \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\}$$

- **On applique le PFD à S_2 :**

$$\{D(S_2/R_g)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2)\} + \{\tau(S_1 \rightarrow S_2)\}$$

- **On applique le PFD à $\Sigma = S_1 \cup S_2$:**

$$\{D(\Sigma/R_g)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\}$$



donc $$\{D(\Sigma/R_g)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_1)\} + \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2)\}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

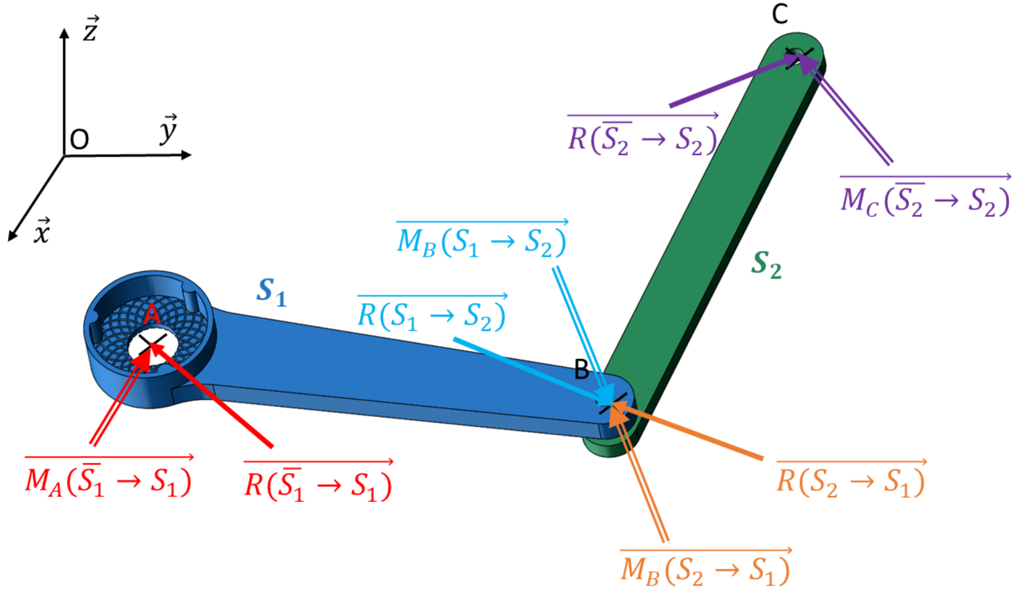
Principe fondamental de la dynamique appliqué à plusieurs solides : (Théorème des actions réciproques)

En utilisant les propriétés du torseur dynamique,

$$\{D(\Sigma = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{S_2}/R_g)\} = \{D(S_1/R_g)\} + \{D(S_2/R_g)\}$$

D'où $$\{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} + \{\tau(S_1 \rightarrow S_2)\} = \{0\}$$

(→ principe des actions mutuelles vu avec le PFS en 1ère année).



<u>Conclusion :</u> Quand on isole un ensemble de solides Σ, et que l'on applique le PFD, on s'intéresse uniquement au bilan des actions mécaniques extérieures à Σ.
(On ne tient pas compte des interactions intérieures à Σ).

Principe Fondamental de la Dynamique

Théorèmes généraux de la dynamique

Le théorème de la résultante dynamique

$$\overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} = M_{\Sigma}\,\overrightarrow{\Gamma(G \in \Sigma / R_g)}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

Théorèmes généraux de la dynamique

Le théorème du moment dynamique

$$\overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} = \overrightarrow{\delta(A, \Sigma / R_g)}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

Théorèmes généraux de la dynamique

Cas particuliers

Système au repos :

On retrouve le principe du PFS avec $\{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\} = \{0\}$.

Principe Fondamental de la Dynamique

Théorèmes généraux de la dynamique

Cas particuliers

Système en mouvement de translation rectiligne :

$$\overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \to \Sigma)} = M_{\Sigma}\,\overrightarrow{\Gamma(G \in \Sigma/R_g)} \text{ et } \overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma} \to \Sigma)} = \vec{0}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

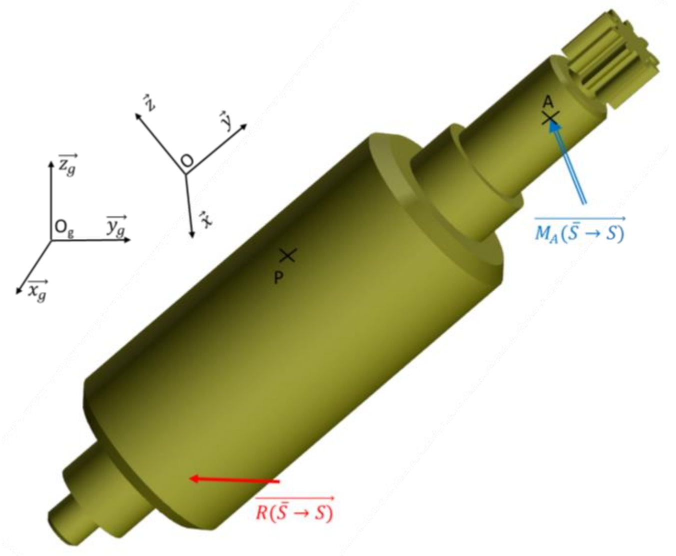
Théorèmes généraux de la dynamique

Cas particuliers

Système en mouvement de rotation autour d'un axe fixe, soit A un point de cet axe :

$$\overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \to \Sigma)} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma} \to \Sigma)} = \overrightarrow{\delta(A, \Sigma/R_g)}$$

PFD dans un repère non galiléen (pour info)



Soit R_g $(O_g, \overrightarrow{x_g}, \overrightarrow{y_g}, \overrightarrow{z_g})$ un repère galiléen et R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère non galiléen.

Le PFD s'applique à un repère quelconque à condition d'ajouter au torseur des efforts extérieurs, les torseurs des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis définit par les éléments de réduction précédents et rappelés ci-dessous :

$$\{D_{ie}(S, R/R_g)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{Q_{ie}(S, R/R_g)} \\ \overrightarrow{\delta_{ie}(A, R/R_g)} \end{Bmatrix}$$

et $$\{D_{ic}(S, R/R_g)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{Q_{ic}(S, R/R_g)} \\ \overrightarrow{\delta_{ic}(A, S/R)} \end{Bmatrix}$$

Méthodologie

Détermination d'efforts de liaisons

Quelles sont les composantes des torseurs d'inter-efforts ?

Problème : **Dimensionnement d'une liaison ou d'une structure**

Modèle adopté : **Schéma mécanique de structure** (paramétrage, liaisons réelles, …)

Ecrire toutes les équations correspondant aux liaisons à déterminer

Méthodologie

Détermination d’une équation de mouvement

Problème direct :

Efforts connus → Accélérations des solides ?

Problème inverse :

Loi de mouvement connue + charges extérieures → Efforts appliqués par les actionneurs ?

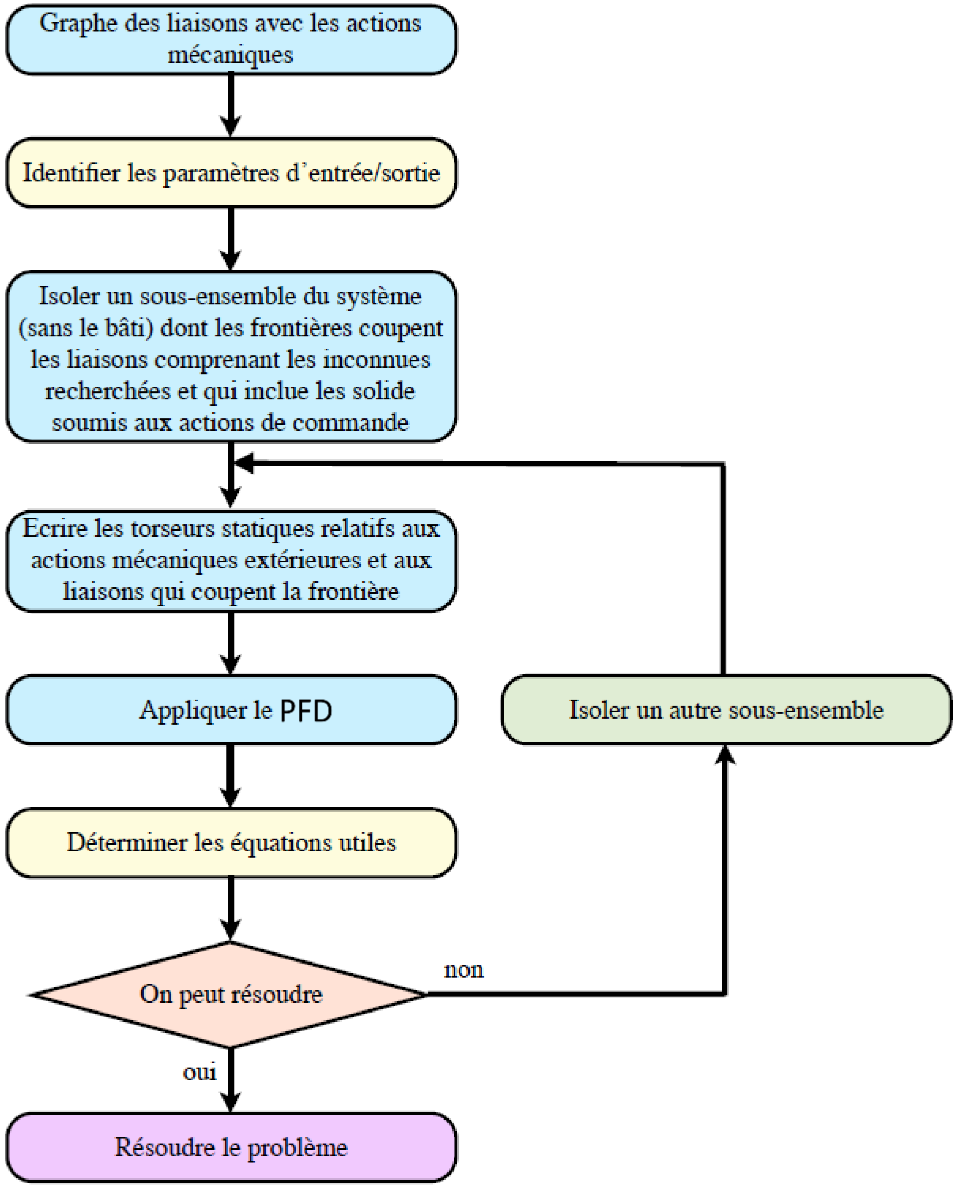
Méthodologie

Détermination d'une équation de mouvement

Problème : Choix d'un actionneur ou validation d'un choix :

- **Isolement et choix judicieux des équations à utiliser**
- **Schéma mécanique (cinématique) avec un graphe des liaisons**
- **Ecrire (uniquement) les équations correspondant aux mouvements**
- **Dans la plupart des cas faire autant d'isolement que de solides**
- **Commencer par les 2 extrémités (entrées et sorties) est souvent une bonne solution quand on ne sait pas par où commencer.**

Stratégie globale



Stratégie globale

- **PFD** + Préciser l'équation vectorielle utilisée.

- **Choisir judicieusement le(s) vecteur(s) de projection**.

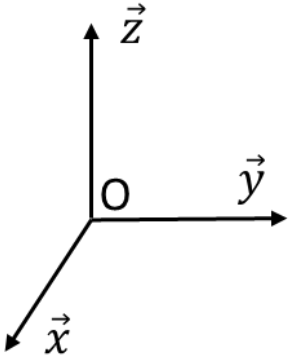
- **Ecriture du PFD sous forme vectorielle.**

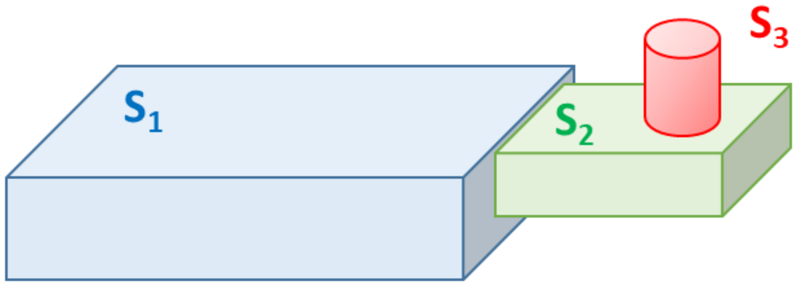
- **Développer l'équation scalaire** (choix du vecteur de projection).

- **Vérifier à chaque ligne l'homogénéité de vos résultats !!!**

Remarque générale : Le repère de dérivation n'a rien à voir avec le repère d'expression : **en dynamique on dérive pratiquement toujours par rapport au R_g.**

ASTUCES DE CALCULS



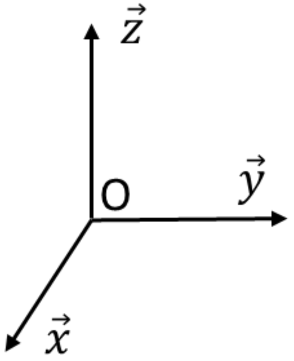


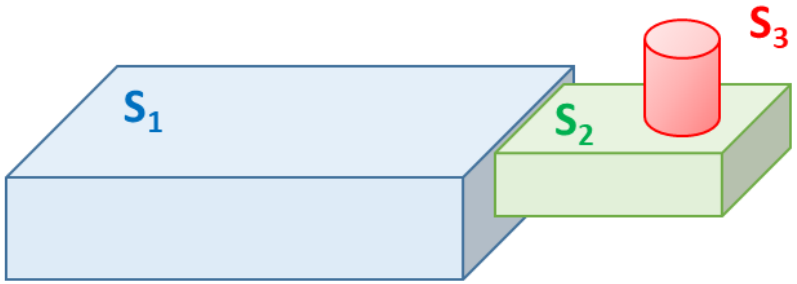
$$\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$$

Matrices d’inertie

$$\boxed{[I_C(\Sigma)]_R = [I_C(S_1)]_R + [I_C(S_2)]_R + [I_C(S_3)]_R}$$

ASTUCES DE CALCULS





$$\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$$

Moments cinétiques

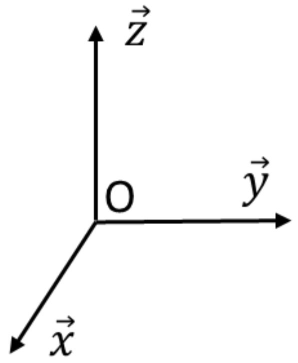
Moment cinétique global → moments cinétiques de chaque solide :

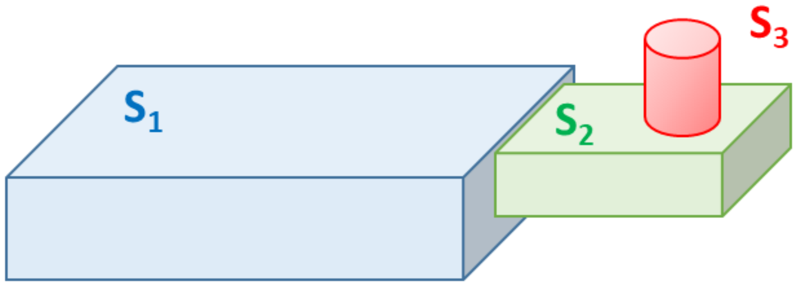
$$\overrightarrow{\sigma(C,\Sigma/R_g)} = \overrightarrow{\sigma(C,S_1/R_g)} + \overrightarrow{\sigma(C,S_2/R_g)} + \overrightarrow{\sigma(C,S_3/R_g)}$$

Moment cinétique se calcule avec la formule suivante :

$$\overrightarrow{\sigma(C,S_k/R_g)} = M_{S_k}\overrightarrow{CG_k} \wedge \overrightarrow{V(C \in S_k/R_g)} + [I_C(S_k)](\overrightarrow{\Omega_{S_k/R_g}}) \text{ pour } k = 1, 2 \text{ ou } 3$$

ASTUCES DE CALCULS





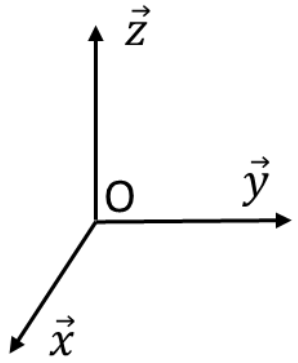
$$\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$$

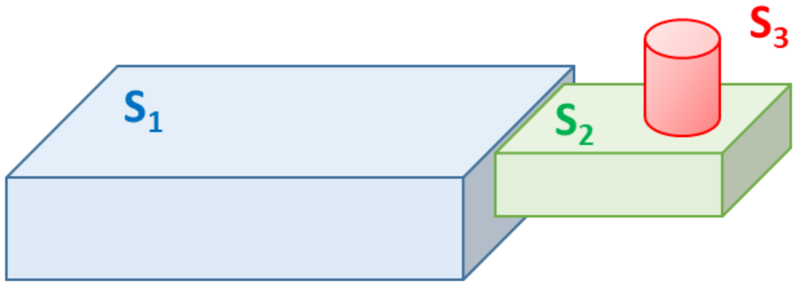
Résultantes dynamiques - Accélérations

Résultante dynamique globale → résultantes dynamiques de chaque solide :

$$M_\Sigma \, \overrightarrow{\Gamma(G_{123} \in \Sigma/R_g)} = M_1 \, \overrightarrow{\Gamma(G_1 \in 1/R_g)} + M_2 \, \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/R_g)} + M_3 \, \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/R_g)}$$

ASTUCES DE CALCULS





$$\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$$

Moments dynamiques

Moment dynamique global → moments dynamiques de chaque solide :

$$\overrightarrow{\delta(C,\Sigma/R_g)} = \overrightarrow{\delta(C,S_1/R_g)} + \overrightarrow{\delta(C,S_2/R_g)} + \overrightarrow{\delta(C,S_3/R_g)}$$

Moment dynamique se calcule avec la formule suivante :

$$\overrightarrow{\delta(C,S_k/R_g)} = \frac{d\,\overrightarrow{\sigma(C,S_k/R_g)}}{dt} + M_{S_k}\,\overrightarrow{V(C/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G_k \in S_k/R_g)} \text{ pour } k = 1,2 \text{ ou } 3$$