Dynamique du Solide

Compétences attendues :

- ✓ Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
- ✓ Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
- ✓ Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.
- ✓ Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

1. Torseur dynamique (quantités d'accélération)

On définit le torseur dynamique du solide S par rapport à R_g au point Q :

$$\{T_d(S/R_g)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d(S/R_g)} \\ \overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_S \overrightarrow{\Gamma(P \in S/R_g)}\, dm(P) \\ \int_S \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{\Gamma(P \in S/R_g)}\, dm(P) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \textit{Résultante dynamique} \\ \textit{Moment dynamique en } Q \end{matrix}$$

1.1. Résultante dynamique

$$\overrightarrow{R_d(S/R_g)} = M_S\, \overrightarrow{\Gamma(G \in S/R_g)}$$

$\overrightarrow{R_d(S/Rg)}$ est un invariant vectoriel, caractéristique de la résultante d'un torseur.

1.2. Moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)} = \overrightarrow{\delta(B,S/R_g)} + \overrightarrow{QB} \wedge \overrightarrow{R_d(S/R_g)}$$

$\overrightarrow{\delta(Q,S/Rg)}$ est le champ de moment d'un torseur.

1.3. Calcul des quantités d'accélération

$$\overrightarrow{R_d(S/R_g)} = \frac{d\, \overrightarrow{R_c(S/R_g)}}{dt}$$

$$\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)} = \frac{d\, \overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}}{dt} + M_S\, \overrightarrow{V(Q/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}$$

Remarque :

- La vitesse au point Q est calculée comme s'il n'appartenait pas à S.
- Comme il n'existe pas de formule simple pour le calcul du moment dynamique d'un solide, on calcule en général le moment cinétique puis on dérive.

1.4. Cas particulier

$$\boldsymbol{Q\ fixe\ dans\ R_g \rightarrow \overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)} = \frac{d}{dt}[\overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}]}$$

$$\boldsymbol{G = Q \rightarrow \overrightarrow{\delta(G,S/R_g)} = \frac{d}{dt}[\overrightarrow{\sigma(G,S/R_g)}]}$$

<u>Remarque :</u> On retrouve ici l'intérêt de se placer en G ou en un point Q fixe dans R_g.

1.5. Remarque : calcul d'une projection sur un axe

$$\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)}.\vec{u} = \frac{d\overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}}{dt}.\vec{u} + M_S\left(\left(\overrightarrow{V(Q/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}\right)\right).\vec{u}$$

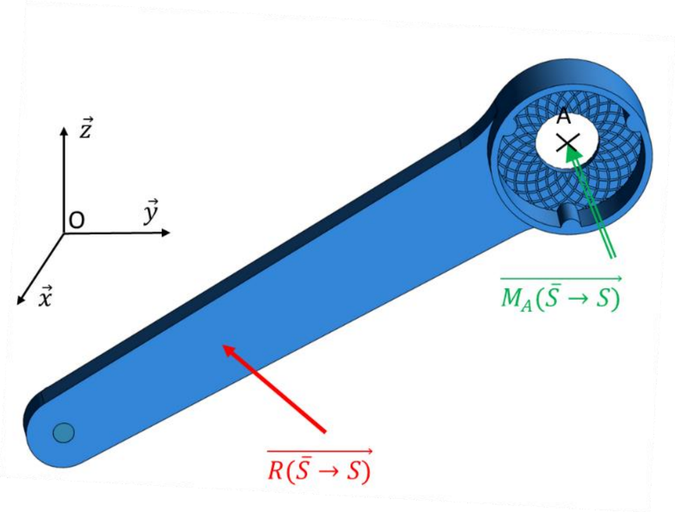
$$\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)}.\vec{u} = \frac{d(\overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}.\vec{u})}{dt} - \overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}.\frac{d\vec{u}}{dt} + M_S\left(\left(\overrightarrow{V(Q/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}\right)\right).\vec{u}$$

Lorsque le vecteur $\vec{u}$ est constant, cela peut simplifier considérablement les calculs en évitant d'avoir à dériver l'intégralité du moment cinétique souvent exprimé dans une autre base.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\delta(Q,S/R_g)}.\vec{u} = \frac{d(\overrightarrow{\sigma(Q,S/R_g)}.\vec{u})}{dt} + M_S\left(\left(\overrightarrow{V(Q/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}\right)\right).\vec{u}}$$

2. Principe Fondamental de la Dynamique

2.1. Principe fondamental de la dynamique appliqué à 1 solide.



- Soit S un solide en mouvement par rapport à un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- S est soumis à des actions mécaniques ***extérieures*** (ces actions mécaniques peuvent être de contact ou à distance) modélisées par le torseur :

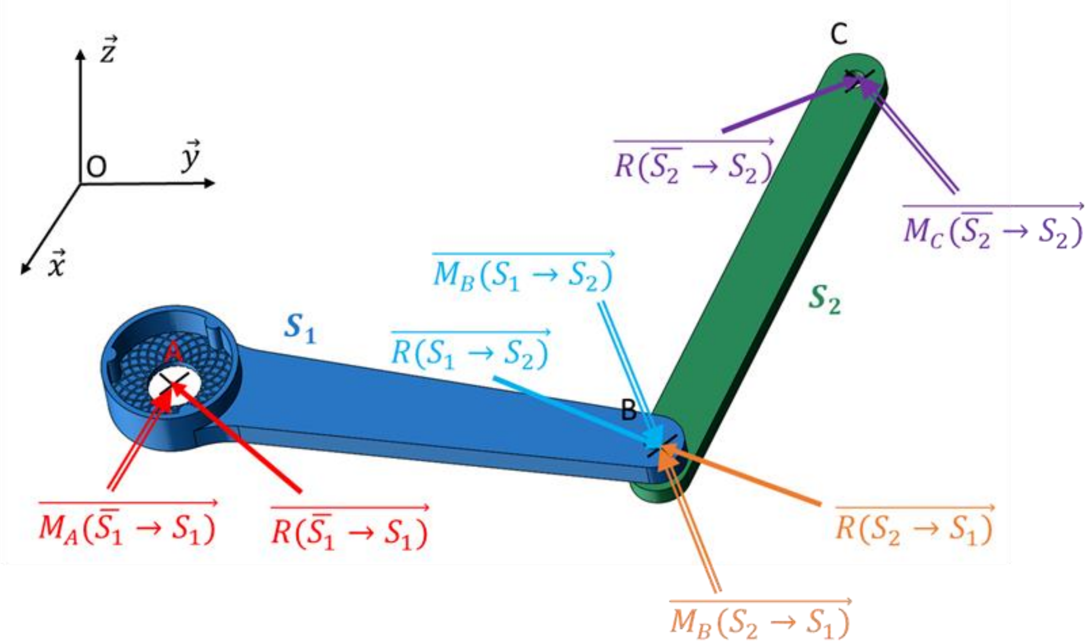
$\{\tau(\bar{S} \to S)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(\bar{S} \to S)} \\ \overrightarrow{M_A(\bar{S} \to S)} \end{Bmatrix}_A$ dont les éléments de réduction sont déterminés au point A.

Il existe au moins un repère R_g, appelé repère galiléen tel que le torseur des actions mécaniques *extérieures* appliquées à S (défini en un point A) soit égal au torseur dynamique du mouvement de S par rapport à R_g (défini lui aussi au point A).

$$\{\tau(\bar{S} \to S)\} = \{D(S/R_g)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(\bar{S} \to S)} \\ \overrightarrow{M_A(\bar{S} \to S)} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} m\overrightarrow{\Gamma_G(S/R_g)} \\ \overrightarrow{\delta_A(S/R_g)} \end{Bmatrix}_A$$

2.2. Principe fondamental de la dynamique appliqué à plusieurs solides : (Théorème des actions réciproques)



- Soit S_1 et S_2 deux solides appartenant à un ensemble Σ.
- Soit A $\in$ (S_1), C $\in$ (S_2) et B $\in$ (S_1)$\cap$(S_2).

<u>On isole S_1. Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur S_1 :</u>

$$\{\tau(\bar{\Sigma} \to S_1)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \to S_1)} \\ \overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma} \to S_1)} \end{Bmatrix}_A$$

: le torseur résultant des actions mécaniques ***<u>extérieures</u>*** à (Σ) appliquées sur (S_1).

$$\{\tau(S_2 \to S_1)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(S_2 \to S_1)} \\ \overrightarrow{M_B(S_2 \to S_1)} \end{Bmatrix}_B$$

: le torseur des actions mécaniques ***<u>intérieures</u>*** à (Σ) appliquées par (S_2) sur (S_1).

<u>On isole S_2. Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur S_2 :</u>

$$\{\tau(\bar{\Sigma} \to S_2)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \to S_2)} \\ \overrightarrow{M_C(\bar{\Sigma} \to S_2)} \end{Bmatrix}_C$$

: le torseur résultant des actions mécaniques ***<u>extérieures</u>*** à (Σ) appliquées sur (S_2).

$$\{\tau(S_1 \to S_2)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(S_1 \to S_2)} \\ \overrightarrow{M_B(S_1 \to S_2)} \end{Bmatrix}_B$$

: le torseur des actions mécaniques ***<u>intérieures</u>*** à (Σ) appliquées par (S_1) sur (S_2).

On isole $\Sigma = S_1 \cup S_2$. Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur Σ :

$\{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_1)\} + \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2)\}$: le torseur résultant des actions mécaniques ***extérieures*** à (Σ) appliquées sur (S_1 et S_2).

- **On applique le PFD à S_1 :** $\{D(S_1/R_g)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_1)\} + \{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\}$
- **On applique le PFD à S_2 :** $\{D(S_2/R_g)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2)\} + \{\tau(S_1 \rightarrow S_2)\}$

- **On applique le PFD à $\Sigma = S_1 \cup S_2$:** $\{D(\Sigma/R_g)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\}$ donc

$$\{D(\Sigma/R_g)\} = \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_1)\} + \{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow S_2)\}$$

En utilisant les propriétés du torseur dynamique, $\{D(\Sigma = S_1 + S_2/R_g)\} = \{D(S_1/R_g)\} + \{D(S_2/R_g)\}$

D'où $$\{\tau(S_2 \rightarrow S_1)\} + \{\tau(S_1 \rightarrow S_2)\} = \{0\}$$

(Nous retrouvons ici le principe des actions mutuelles vu avec le PFS en 1ère année).

Conclusion : Quand on isole un ensemble de solides Σ, et que l'on applique le PFD, on s'intéresse uniquement au bilan des actions mécaniques extérieures à Σ. (On ne tient pas compte des interactions intérieures à Σ).

2.3. Théorèmes généraux de la dynamique

Ces expressions proviennent de la séparation de la résultante et du moment du torseur dynamique.

2.3.1. Le théorème de la résultante dynamique

$$\overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} = M_\Sigma \, \overrightarrow{\Gamma(G \in \Sigma/R_g)}$$

2.3.2. Le théorème du moment dynamique

$$\overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} = \overrightarrow{\delta(A, \Sigma/R_g)}$$

2.3.3. Cas particuliers

Système au repos :

On retrouve le principe du PFS avec $\{\tau(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\} = \{0\}$.

Système en mouvement de translation rectiligne :

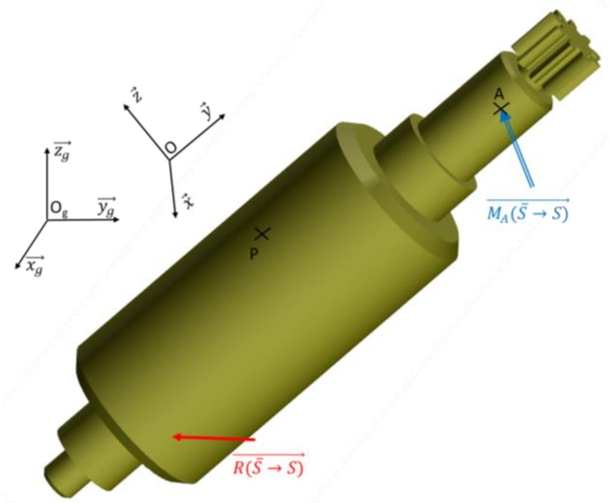
$$\overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} = M_\Sigma \, \overrightarrow{\Gamma(G \in \Sigma/R_g)} \text{ et } \overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} = \vec{0}$$

Système en mouvement de rotation autour d'un axe fixe, soit A un point de cet axe :

$$\overrightarrow{R(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} = \overrightarrow{\delta(A, \Sigma/R_g)}$$

3. PFD dans un repère non-galiléen (pour info)

Soit R_g $(O_g, \overrightarrow{x_g}, \overrightarrow{y_g}, \overrightarrow{z_g})$ un repère galiléen et R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère non galiléen.



Le PFD s'applique à un repère quelconque à condition d'ajouter au torseur des efforts extérieurs, les torseurs des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis définit par les éléments de réduction ci-dessous :

$$\{D_{ie}(S, R/R_g)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{Q_{ie}(S, R/R_g)} \\ \overrightarrow{\delta_{ie}(A, R/R_g)} \end{Bmatrix}$$

et $$\{D_{ic}(S, R/R_g)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{Q_{ic}(S, R/R_g)} \\ \overrightarrow{\delta_{ic}(A, S/R)} \end{Bmatrix}$$

4. Méthodologie

4.1. Détermination d'efforts de liaisons

Quelles sont les composantes des torseurs d'inter-efforts ?

Problème : **Dimensionnement d'une liaison ou d'une structure** : choix ou validation des implantations de liaisons, des dimensions des pièces, des composants normalisés, des matériaux …

Modèle adopté : **Schéma mécanique de structure** : il est nécessaire de paramétrer l'implantation des composants donc des liaisons « réelles » et non des liaisons réduites.

Ecrire toutes les équations correspondant aux liaisons à déterminer. Il n'est pas toujours nécessaire de développer tous les isolements intermédiaires.

4.2. Détermination d'une équation de mouvement

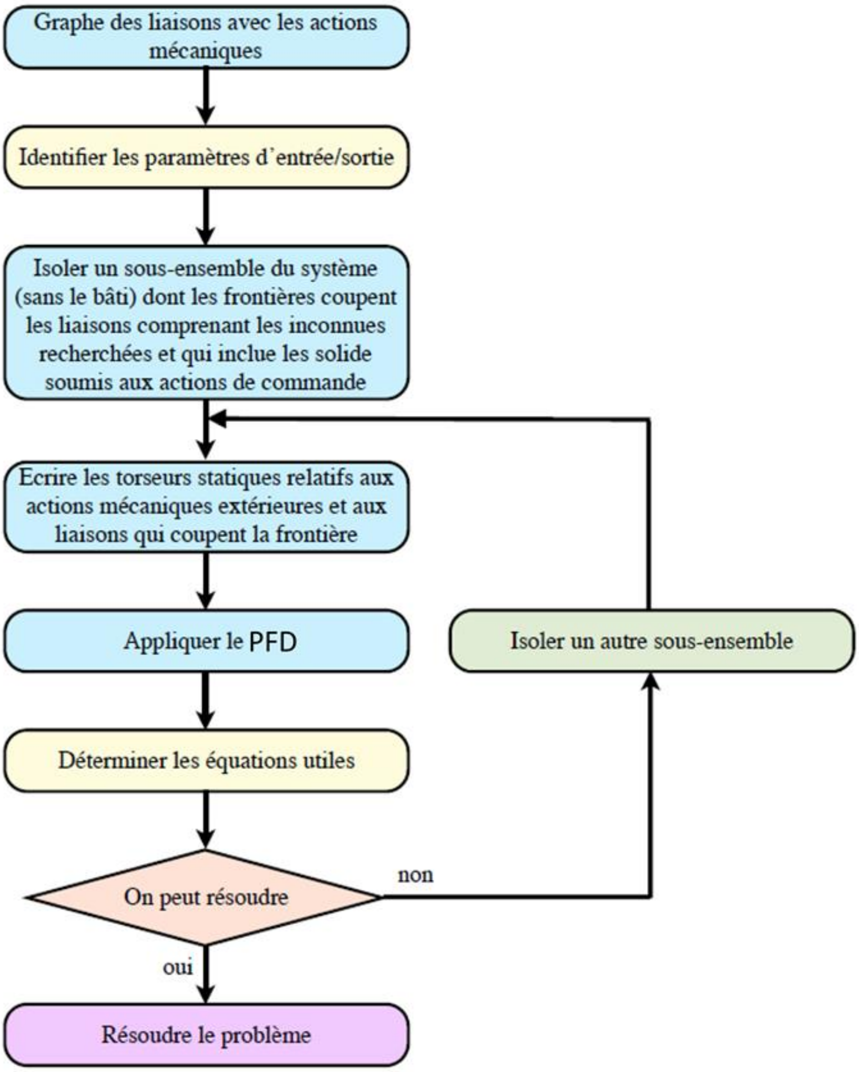
Problème direct : Vompte tenu des « efforts » appliqués par les actionneurs et des charges extérieures appliquées au système, quelles sont les « accélérations » des solides ?

Problème inverse : Compte tenu d'une loi de mouvement souhaitée (trapèze, etc…) et des charges extérieures sur le système (récepteurs) quels devront être les efforts appliqués par les actionneurs ?

Problème : Choix d'un actionneur ou validation d'un choix :

- **Isolement et choix judicieux des équations à utiliser** (très souvent une seule équation scalaire à développer par isolement).
- **Schéma mécanique (cinématique) avec un graphe des liaisons, en indiquant les axes de transmission des puissances.**
- **Ecrire (uniquement) les équations correspondant aux mouvements** (somme des résultantes projetée sur l'axe d'une translation, somme des moments en un point de l'axe d'une rotation et projetée sur cet axe).
- **Dans la plupart des cas faire autant d'isolement que de solides** (penser aussi à faire des sous-ensembles de solides, notamment soumis à 2 forces et dont la masse est négligeable).
- **Commencer par les 2 extrémités (entrées et sorties) est souvent une bonne solution quand on ne sait pas par où commencer.**

5. Stratégie globale



- Appliquer le PFD en précisant quelle équation vectorielle vous utilisez et en quel point si c'est l'équation de moment (penser à réduire les torseurs au bon point).

- **Choisir judicieusement le(s) vecteur(s) de projection** que vous utiliserez.

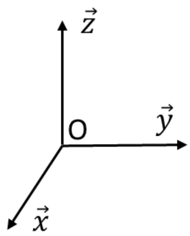
- **Ecriture du PFD sous forme vectorielle** (on cherchera dans un premier temps à conserver les équations vectorielles telles qu'elles et si besoin est, ces dernières seront exprimées dans la même base).

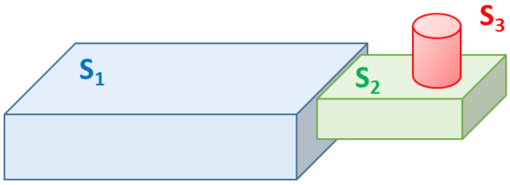
- **Développer l'équation scalaire** en commençant par les efforts, pour vérifier que vous faites bien apparaître ce qui était prévu (il n'est pas toujours nécessaire d'effectuer tous les développements, en particulier pour les composantes du torseur dynamique ; le simple choix du vecteur de projection peut faire disparaître certains développements).

- **Vérifier à chaque ligne l'homogénéité de vos résultats !!!**

6. Astuces de calculs

Considérons un ensemble de solides Σ composé de plusieurs solides élémentaires.





$$\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$$

6.1. Matrices d'inertie

Pour calculer la matrice d'inertie de cet ensemble de solides, nous pouvons calculer les matrices d'inertie de chaque solide et es ajouter en un même point. Pour chaque matrice, nous utilisons le théorème de Huygens (entre son centre de gravité et le point C dans l'exemple ici).

$$\boxed{[I_C(\Sigma)]_R = [\boldsymbol{I_C(S_1)}]_{\boldsymbol{R}} + [\boldsymbol{I_C(S_2)}]_{\boldsymbol{R}} + [\boldsymbol{I_C(S_3)}]_{\boldsymbol{R}}}$$

6.2. Moments cinétiques

Pour le calcul du moment cinétiques en un point C (par exemple). On peut calculer le moment cinétique global $\overrightarrow{\sigma(C,\Sigma/R_g)}$, ce qui est très long et qui s'avère assez compliqué (détermination du centre de gravité global G_{123}, ...).

<u>Le plus simple est de décomposer le moment cinétique global en passant par les moments cinétiques de chaque solide :</u>

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma(C,\Sigma/R_g)}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma(C,S_1/R_g)}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma(C,S_2/R_g)}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma(C,S_3/R_g)}}$$

<u>Et chaque moment cinétique se calcule avec la formule suivante :</u>

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma(C,S_k/R_g)}} = \boldsymbol{M_{S_k}}\overrightarrow{\boldsymbol{CG_k}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V\left(C \in S_k/R_g\right)}} + [\boldsymbol{I_C(S_k)}](\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{S_k/R_g}}}) \text{ pour } \boldsymbol{k = 1, 2 \; ou \; 3}$$

6.3. Résultantes dynamiques - Accélérations

Pour le calcul des résultantes dynamiques ou des accélérations au centre de gravité. On peut calculer la résultante dynamique globale $M_\Sigma \overrightarrow{\Gamma(G_{123} \in \Sigma/R_g)}$, ce qui est très long et compliqué (détermination du centre de gravité global G_{123}, …).

Le plus simple est de décomposer la résultante dynamique globale en passant par les résultantes dynamiques de chaque solide :

$$\boldsymbol{M_\Sigma \overrightarrow{\Gamma(G_{123} \in \Sigma/R_g)} = M_1 \overrightarrow{\Gamma(G_1 \in 1/R_g)} + M_2 \overrightarrow{\Gamma(G_2 \in 2/R_g)} + M_3 \overrightarrow{\Gamma(G_3 \in 3/R_g)}}$$

6.4. Moments dynamiques

Pour le calcul du moment dynamique en un point C (par exemple). On peut calculer le moment dynamique global $\overrightarrow{\delta(C, \Sigma/R_g)}$, ce qui est très long et qui s'avère assez compliqué (détermination du centre de gravité global G_{123}, …).

Le plus simple est de décomposer le moment dynamique global en passant par les moments dynamiques de chaque solide :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\delta(C, \Sigma/R_g)} = \overrightarrow{\delta(C, S_1/R_g)} + \overrightarrow{\delta(C, S_2/R_g)} + \overrightarrow{\delta(C, S_3/R_g)}}$$

Et chaque moment dynamique se calcule avec la formule suivante :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\delta(C, S_k/R_g)} = \frac{d\, \overrightarrow{\sigma(C, S_k/R_g)}}{dt} + M_{S_k} \overrightarrow{V(C/R_g)} \wedge \overrightarrow{V(G_k \in S_k/R_g)} \text{ pour } k = 1, 2 \text{ ou } 3}$$