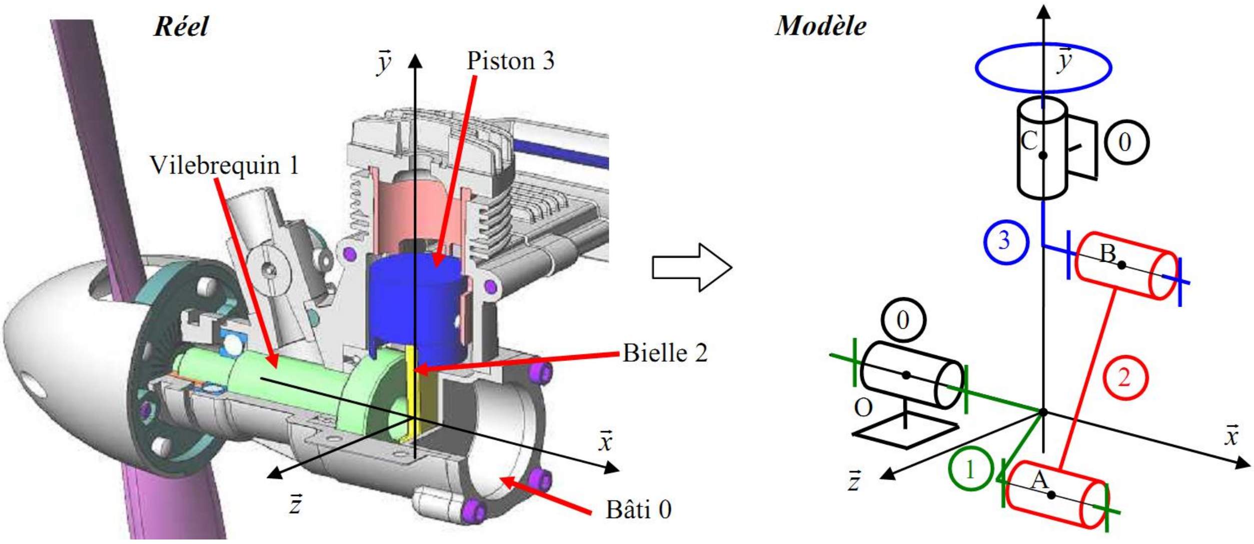
2_ Cinématique du Solide

Compétences attendues :

- ✓ Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
- ✓ Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.

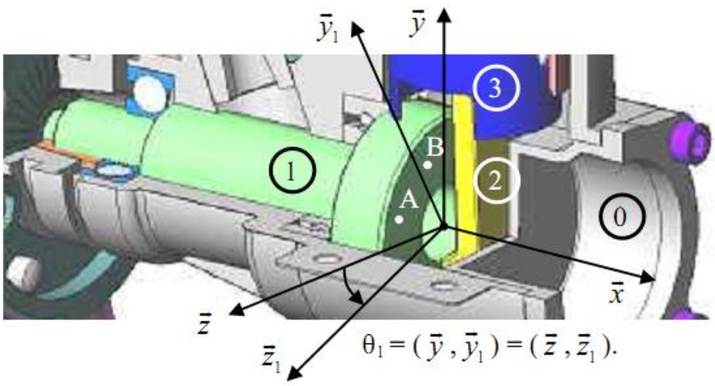
Le cours sera illustré par le système bielle-manivelle ci-dessous constituant le moteur thermique à deux temps d'un engin d'aéromodélisme appelé micro-moteur. L'objectif est d'étudier les mouvements du piston 3 et du vilebrequin 1 pour pouvoir à terme exprimer la relation qui lie leurs mouvements.



1. Cinématique du solide

1.1. Champs des vecteurs vitesse des point d'un solide

Considérons le mouvement du solide 1 par rapport au repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. A et B sont deux points qui appartiennent physiquement au solide 1. R_1 $(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ est un repère lié au solide 1.



Le solide 1 étant indéformable, la distance entre les deux points A et B reste constante au cours du temps ce qui implique : $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} = \vec{0}$

Calculons la dérivée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au repère R en utilisant la formule de la base mobile.

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{AB} \text{ est fixe dans } R_1$$

En décomposant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en faisant apparaître le point O.

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}\right]_{R} - \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_{R} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_{B\in R_1/R}}} - \overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}}$$

On obtient finalement :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V_{B\in R_1/R}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$$

Cette formule est communément appelée *formule du solide* ou *formule de Varignon.*

<u>Remarque :</u>

Compte tenu des propriétés du produit vectoriel, cette formule peut également s'écrire :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V_{B\in R_1/R}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}} \qquad \textbf{\textit{(BABAR)}}$$

1.2. Torseur cinématique

On peut maintenant définir le torseur cinématique du solide 1 dans son mouvement par rapport au repère R. Sa valeur dépend du point d'écriture. Il est constitué de deux éléments de réduction :

- $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}}$: le vecteur (taux de) rotation du solide 1 par rapport au repère R. $\Omega_{R_1/R}$ est la résultante du torseur cinématique.
- $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}}$: la vitesse du point A appartenant au solide 1 par rapport repère R. $V_{A\in R_1/R}$ est le moment au point A du torseur cinématique.

$$\left\{\boldsymbol{V_{R_1/R}}\right\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}}\end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{A}} = \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\omega_x} & \boldsymbol{V_x} \\ \boldsymbol{\omega_y} & \boldsymbol{V_y} \\ \boldsymbol{\omega_z} & \boldsymbol{V_z}\end{matrix}\right\}_{\boldsymbol{A,R}}$$

- Un torseur cinématique caractérise entièrement le mouvement relatif de deux solides.
- Si la vitesse est calculée au point A, on dira que le torseur cinématique est réduit au point A.
- Si on connaît le torseur cinématique du solide 1 dans son mouvement par rapport au solide 0 réduit au point A, on peut alors calculer la vitesse de tous les points du solide en utilisant la formule du solide.

Exemple : Au point B ce torseur se déduit du torseur au point A :
La formule de changement de point montre qu'en connaissant la vitesse de rotation d'un solide et la vitesse d'un seul de ses points, on est capable de calculer la vitesse de n'importe quel de ses points. La connaissance de ces deux éléments suffit donc à définir le mouvement d'un solide par rapport à un autre.

$$\{\boldsymbol{V_{R_1/R}}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V_{B\in R_1/R}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in R_1/R}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}} \end{matrix} \right\}_{\boldsymbol{B}}$$

Attention : Pour faire la somme de deux torseurs, ils doivent être écrits au même point ! !

1.3. Champs des vecteurs accélération des points d'un solide

Pour obtenir l'expression du champ des vecteurs accélération du solide S (repère R) en mouvement par rapport au solide S_1 (repère R_1), il suffit de dériver la formule du solide établie précédemment.

$$\overrightarrow{V_{B\in R_1/R}} = \overrightarrow{V_{A\in R_1/R}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{B\in R_1/R}}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{A\in R_1/R}}\right]_R + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}\right]_R$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in R_1/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in R_1/R}} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}\right]_R \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_R$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Puisque $\overrightarrow{AB}$ fixe dans R_1

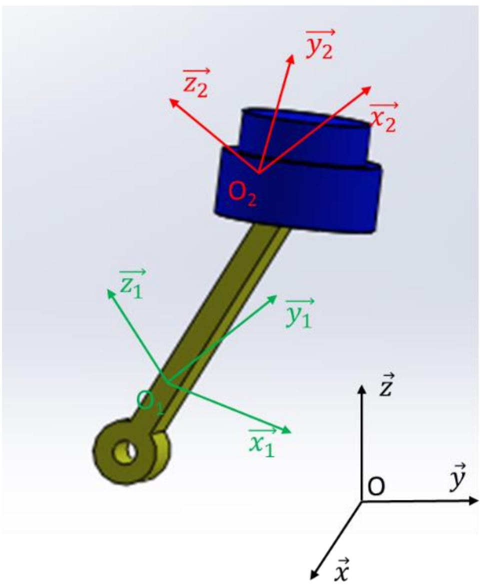
$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma_{B\in R_1/R}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma_{A\in R_1/R}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \left[\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}}\right]_{\boldsymbol{R}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}} \wedge (\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{R_1/R}}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{AB}})$$

Remarque : Le champ des vecteurs accélération d'un solide indéformable n'est pas un champ de moment.

Le terme en double produit vectoriel implique que le champ des vecteurs accélération ne respecte pas les mêmes propriétés que le champ des vecteurs vitesse. On ne pourra donc pas écrire ou calculer des accélérations à l'aide de torseurs.

2. Composition de mouvements de solides indéformables

Considérons un solide S_1 (repère R1) en mouvement par rapport au repère R et un solide S_2 (repère R2) en mouvement par rapport à S1.



2.1. Composition des vecteurs vitesse

Quelle relation existe-t-il entre $\overrightarrow{V_{A\in R_2/R_1}}$ et $\overrightarrow{V_{A\in R_2/R}}$?

Par définition :

$$\overrightarrow{V_{A\in R_2/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1}\right]_R + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\right]_R = \overrightarrow{V_{O_1\in R_1/R}} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1A}$$

$$\overrightarrow{V_{A\in R_2/R}} = \overrightarrow{V_{O_1\in R_1/R}} + \overrightarrow{V_{A\in R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1A}$$

d'où

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A\in R_2/R}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A\in R_2/R_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A\in R_1/R}}$$

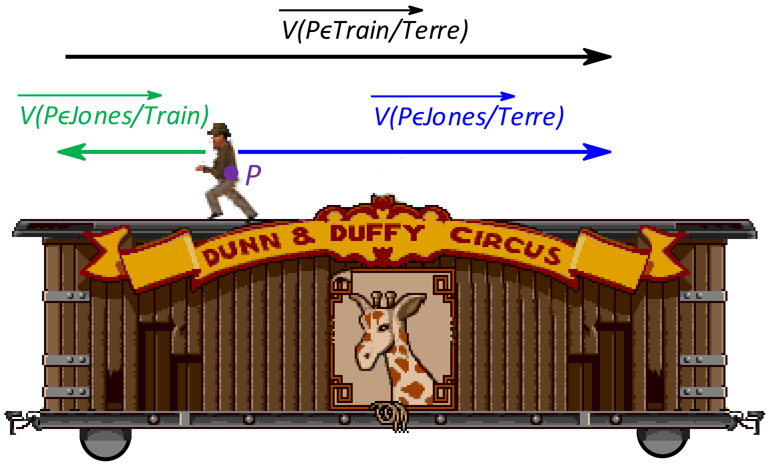
vitesse absolue *vitesse relative* *vitesse d'entraînement*

<u>Généralisation :</u>

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A\in R_n/R_0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A\in R_n/R_{n-1}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A\in R_{n-1}/R_{n-2}}} + \cdots + \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{A\in R_1/R_0}}$$

Exemple : Marche dans un train

Soit un train se déplaçant en translation avec une vitesse $\overrightarrow{V(P \in Train/Terre)}$, soit Indiana Jones ayant peur des serpents se déplaçant dans le train à une vitesse $\overrightarrow{V(P \in Jones/Train)}$.



Alors, la vitesse du personnage par rapport à la Terre $\overrightarrow{V(P \in Jones/Terre)}$ sera donnée par :

$$\overrightarrow{V(P \in Jones/Terre)} = \overrightarrow{V(P \in Jones/Train)} + \overrightarrow{V(P \in Train/Terre)}$$

2.2. Composition des vecteurs rotation

Quelle relation existe-t-il entre $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}$, $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}$?

Grâce à la formule de dérivation vectorielle, on sait que :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_2} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} \wedge \vec{U}$$
$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \vec{U}$$
$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} \wedge \vec{U}$$

En ajoutant ces trois relations, on obtient :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} \wedge \vec{U} = \vec{0}$$
$$(\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}) \wedge \vec{U} = \vec{0}$$

Cette relation doit être vraie pour tout $\vec{U}$ donc $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \vec{0}$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}}$$

Généralisation :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{R_n/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{R_n/R_{n-1}}} + \overrightarrow{\Omega_{R_{n-1}/R_{n-2}}} + \cdots + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}}$$

2.3. Composition des torseurs cinématiques

D'après la relation de composition des vecteurs vitesses et la relation de composition des vecteurs rotation, on peut écrire la relation de composition des torseurs cinématiques :

$$\{V_{R_2/R}\} = \{V_{R_2/R_1}\} + \{V_{R_1/R}\}$$

2.4. Composition des vecteurs accélération

La relation de composition des accélérations est rarement utilisée. Il faut cependant impérativement retenir que les vecteurs accélérations ne se composent pas comme les vecteurs vitesse, un terme s'ajoute appelé accélération de Coriolis.

On admet que :

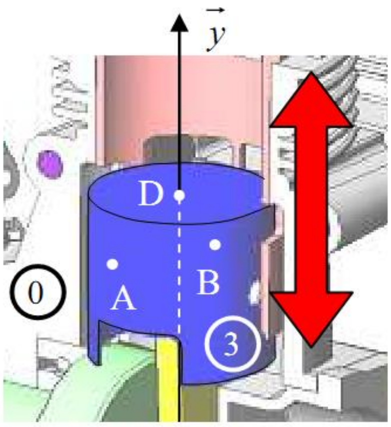
$$\overrightarrow{\Gamma_{A\in R_2/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Gamma_{A\in R_1/R}} + 2.\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in R_2/R_1}}$$

accélération absolue *accélération relative* *accélération d'entraînement* *accélération de Coriolis*

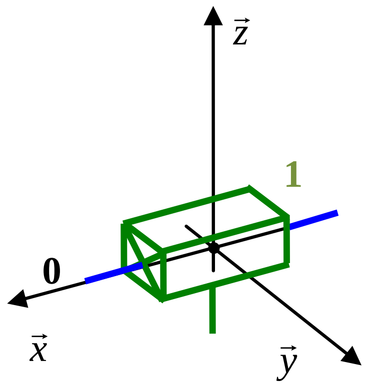
3. Mouvements particuliers

3.1. Le mouvement de translation

Dans le cas du moteur on constate que le piston <u>3</u> du moteur est en mouvement de translation suivant l'axe $(D, \vec{y})$.

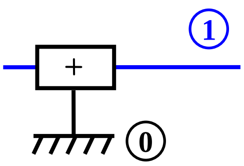


Si le solide 1 est en liaison glissière par rapport au solide 0 le mouvement relatif est appelé **mouvement de translation**.



- Le solide 1 ne change pas d'orientation par rapport au solide 0 (aucune rotation relative entre les deux solides) ce qui implique que $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0}$
- Tous les vecteurs vitesse des points du solide 1 par rapport au solide 0 sont égaux au cours du mouvement et le champ des vitesses s'écrit ici : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \vec{V} \quad \forall\ A\ et\ B\ \in (1)$
- Le torseur cinématique est de la forme $\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V} \end{Bmatrix}_{\forall A\in 1}$: torseur couple
- Les trajectoires de tous les points sont identiques et superposables.

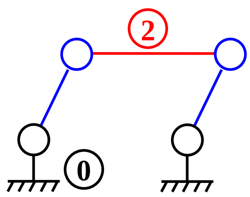
Si ces trajectoires sont des droites, on parle de mouvement de TRANSLATION RECTILIGNE.



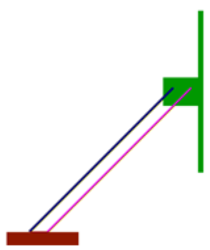
1/0 : Translation rectiligne

Véhicule en ligne droite

Si ces trajectoires sont des cercles, on parle de mouvement de TRANSLATION CIRCULAIRE.

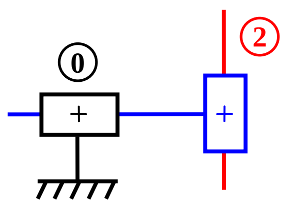


2/0 : Translation circulaire



Essuie-glace

Si ces trajectoires sont des trajectoires quelconques obtenues par association en série de liaisons glissières, on parle de mouvement de TRANSLATION QUELCONQUE.

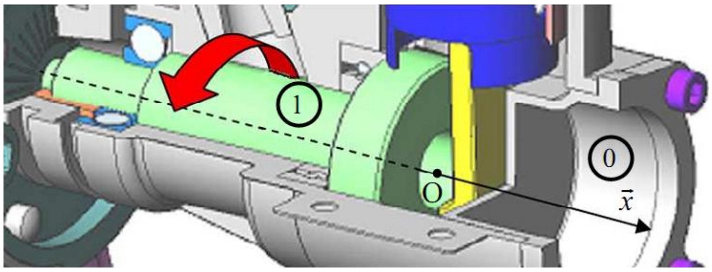


2/0 : Translation

Machine à mesurer tridimensionnelle

3.2. Le mouvement de rotation

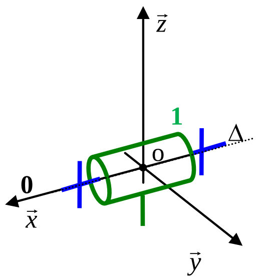
Dans le cas du moteur on constate que le vilebrequin 1 du moteur est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe.



L'axe instantané de rotation du vilebrequin <u>1</u> par rapport au bâti <u>0</u> est l'axe $(O,\vec{x})$. Par conséquent tous les points de l'axe (O, $\vec{x}$) restent fixes au cours du mouvement et :

$$\forall \boldsymbol{P} \in (\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{x}}), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{S}/\mathcal{R})} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Si le solide 1 est en liaison pivot par rapport au solide 0 le mouvement relatif est appelé **mouvement de rotation**.

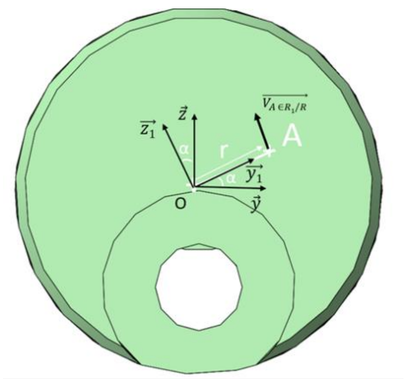


Dans le cas du mouvement de rotation autour d'un axe fixe du solide 1 par rapport au solide 0, il existe au moins deux points du solide 1 qui restent fixes dans le mouvement par rapport à 0. Ces deux points caractérisent l'axe de rotation Δ de 1/0. L'axe Δ est **l'axe de rotation** de 1/0.

- Les trajectoires de tous les points du solide 1 sont des cercles centrés sur l'axe Δ.

Champs des vecteurs vitesse d'un solide en rotation

Calculons la vitesse du point A appartenant au solide 1 par rapport au solide 0



On pose $\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \omega$ et $\overrightarrow{OA} = r.\overrightarrow{y_1}$

$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha}.\vec{x} = \omega.\vec{x}$

Calcul de la vitesse du point A :

$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \vec{0} + \omega.\vec{x} \wedge r.\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = r.\omega.\overrightarrow{z_1}$$

<u>Conséquences :</u>

- $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ est perpendiculaire à (OA)
- $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ est proportionnelle à r

- La forme du torseur cinématique réduit au point A est alors la suivante :

$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \omega\vec{x} \\ r\omega\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_{A\in 1}$$

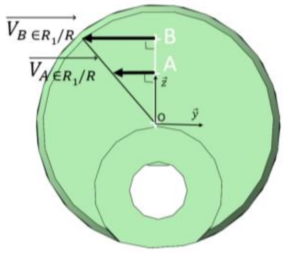
- La forme du torseur cinématique réduit au point 0 (fixe) est alors la suivante :

$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \omega\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O\in 1}$$

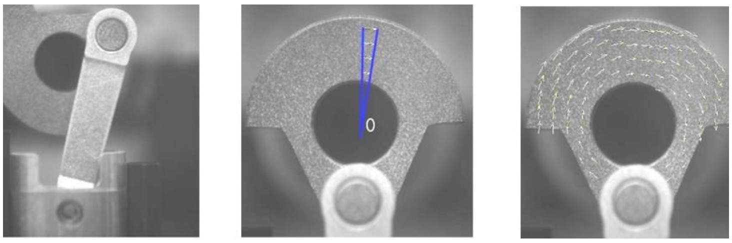
Sur l'axe de rotation le torseur est un glisseur.

Interprétation graphique :

Graphiquement, cette relation se traduit par la proportionnalité entre les intensités des vecteurs vitesse et les distances des points par rapport à l'axe de rotation.

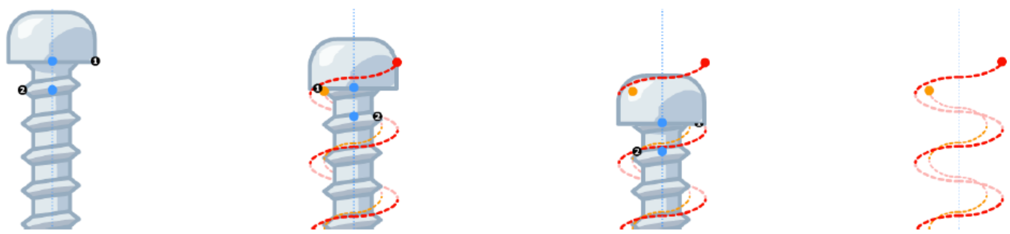


La visualisation du champ de vecteur vitesse du vilebrequin peut être obtenue expérimentalement par analyse d'images obtenues d'une caméra rapide grâce à une technique de corrélation d'images (mesure du déplacement entre 2 images successives, ici 600 000 image/s).



3.3. Le mouvement hélicoïdal

Lorsque le mouvement est plus complexe, il peut être considéré comme la combinaison de rotation(s) et de translation(s). C'est par exemple le cas du mouvement hélicoïdal. L'exemple classique du mouvement hélicoïdal est illustré par une vis (en mouvement par rapport à un écrou par exemple).



- Une droite D de S coïncide à tout instant t avec une droite D_0 du repère R_0
- L'angle de rotation autour de l'axe commun est proportionnel au déplacement sur ce même axe.

Si, par exemple, D_0 coïncide avec l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ alors :

- le paramètre de position angulaire de S dans R_0 sera $\psi = (\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1})$ d'où $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_0}$
- le paramètre de position d'un point M de D sera Z tel que $\overrightarrow{V_{M\in S/R_0}} = V_z\,\overrightarrow{z_0}$

La relation de proportionnalité entre l'angle de rotation et l'avance s'écrit : $V_z = k.\dot{\psi}$.

On définit le pas du mouvement hélicoïdal comme : $\boldsymbol{V_z = k.\dot{\psi} = \frac{pas}{2\pi}\dot{\psi}}$

Le torseur cinématique d'un tel mouvement s'écrit pour un point K de l'axe D :

$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\vec{z} \\ V_z\vec{z} \end{Bmatrix}_{A\in 1} \quad \text{et } V_z = \frac{pas}{2\pi}\dot{\psi}$$

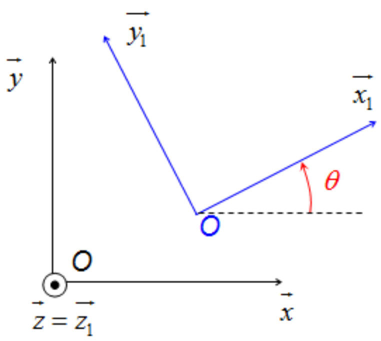
Les trajectoires des points M de S dans le mouvement par rapport à R_0 sont des hélices d'axe D.

4. Mouvement plan sur plan

4.1. Définition

Soient deux repères $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$et $R_1\ (O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ attachés à deux solides S et S_1. Si, au cours du mouvement de S par rapport à S_1, un plan P lié à S reste constamment confondu avec un plan P_1 lié à S_1, le mouvement de S par rapport à S_1 est appelé mouvement plan sur plan.

L'orientation de R_1 par rapport à R est définie par le seul angle θ.



<u>Propriétés :</u>

- Les vecteurs vitesse de tous les points de S_1 en mouvement par rapport au repère S sont inclus dans le plan $P(O,\vec{x},\vec{y})$.
- Le vecteur rotation de S_1 par rapport à S est perpendiculaire au plan $P(O,\vec{x},\vec{y})$.

Exemple :

Dans le cas d'un mouvement dans des plans parallèles à $(\vec{x},\vec{y})$, le torseur cinématique s'écrit alors :

$$\{V_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \cdot & V_x \\ \cdot & V_y \\ \omega_z & \cdot \end{Bmatrix}_{A,R}$$

4.2. Centre instantané de rotation

On montre alors qu'il existe à l'instant t un point *I*, appelé centre instantané de rotation (CIR) du mouvement de S_1 par rapport à S tel que :

$$\overrightarrow{V_{I\in S_1/S}} = \vec{0}$$

A l'instant t le solide S_1 se comporte comme s'il était en rotation autour du point I. A l'instant $t + \Delta t$, le point I change de position.

On peut calculer à l'instant t la vitesse de tout point M en utilisant la formule du solide :

- $\overrightarrow{V_{M\in S_1/S}} = \overrightarrow{V_{I\in S_1/S}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/S}} \wedge \overrightarrow{IM} = \vec{0} + \dot{\theta}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{IM}$
- $\overrightarrow{V_{M\in S_1/S}}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{IM} \Rightarrow$ *I* se trouve sur la perpendiculaire à $\overrightarrow{V_{M\in S_1/S}}$.

Remarques :

- Connaissant le CIR de S_1/S, on peut trouver la direction de la vitesse de n'importe quel point de S_1 dans son mouvement par rapport à *S*.
- Le CIR n'existe pas si le solide est en translation. Dans ce cas, il peut être considéré comme étant à l'infini.
- Pour un mouvement de rotation plane, le CIR est confondu avec le centre de la rotation (cas ou les deux solides sont en liaison pivot).
- A l'instant $t + \Delta t$ le CIR peut changer de position.

4.3. Base et roulante

Le point I est différent à chaque instant. Il se déplace au cours du mouvement.

La base est la trajectoire du CIR dans le plan *P*. La roulante est la trajectoire du CIR dans le plan P_1.

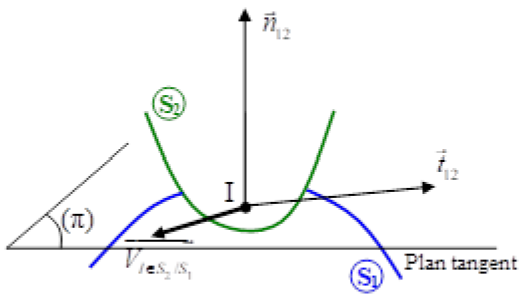
Remarque : La base et la roulante sont deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.

5. Cinématique du contact ponctuel

Dans de nombreuses applications, le contact entre deux solides peut être modélisé par un contact ponctuel (roue d'une voiture sur la route). Il est important de connaître les méthodes à mettre en œuvre pour traiter ce type de problème.

5.1. Hypothèses et modèle

On considère un solide S_2 en mouvement relatif et en contact par rapport à un solide S_1. Pour construire le modèle on définit un point de contact I, une normale au contact $\overrightarrow{n_{12}}$ et un plan tangent au contact (π) entre les deux solides (S_1 est en dessous de (π), S_2 est au-dessus de (π)).



Le mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1 peut être caractérisé cinématiquement par le torseur $\{V_{S_2/S_1}\}$ exprimé au point I :

$$\{V_{S_2/S_1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} \\ \overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} \end{Bmatrix}_I$$

Au cours du mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1, **on suppose qu'il existe toujours un point de contact (non rupture du contact).**

5.2. Mise en évidence du point coïncident de contact

Au niveau du contact entre les solides S_1 et S_2 on peut différencier trois points I différents :

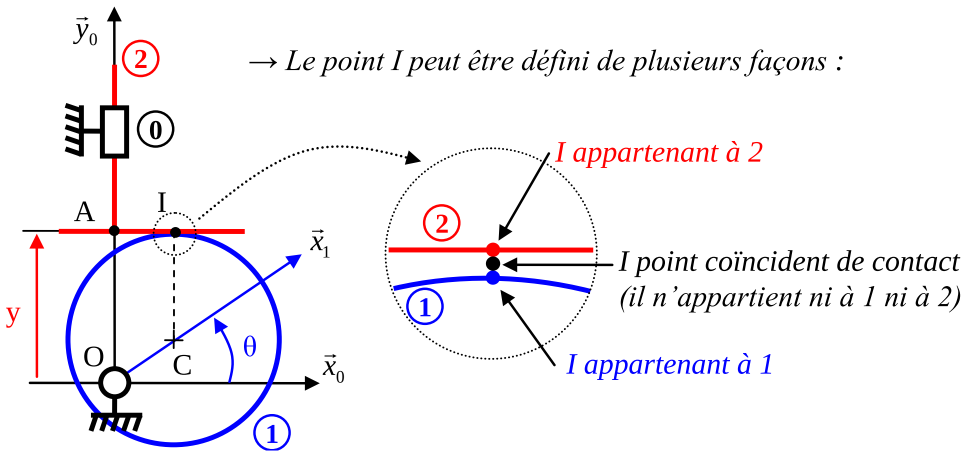
- Le point I matériel appartenant au solide 1
- Le point I matériel appartenant au solide 2
- Le point I qui correspond au point géométrique de contact et qui n'est lié à aucun de deux solides

Les deux premiers points ont une existence matérielle et coïncident au moment du contact avec le 3$^{\text{ème}}$ point géométrique. Les 3 points sont confondus à l'instant t et ne le sont plus à l'instant $t + \Delta t$. Par conséquent :

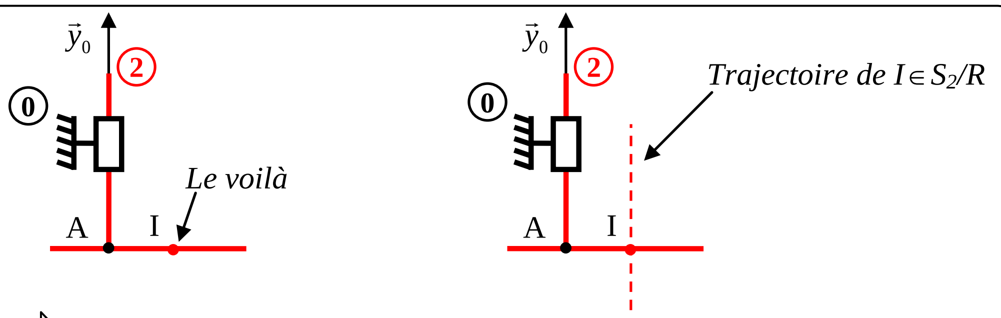
$$\overrightarrow{\boldsymbol{V}_{I\in S_2/R}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{I\in S_1/R}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{V}_{I/R}}$$

<u>Exemple :</u> système de commande par excentrique. La rotation du solide 1 par rapport au bâti entraîne la translation alternative du solide 2 par rapport au bâti.

→ Le point I peut être défini de plusieurs façons :

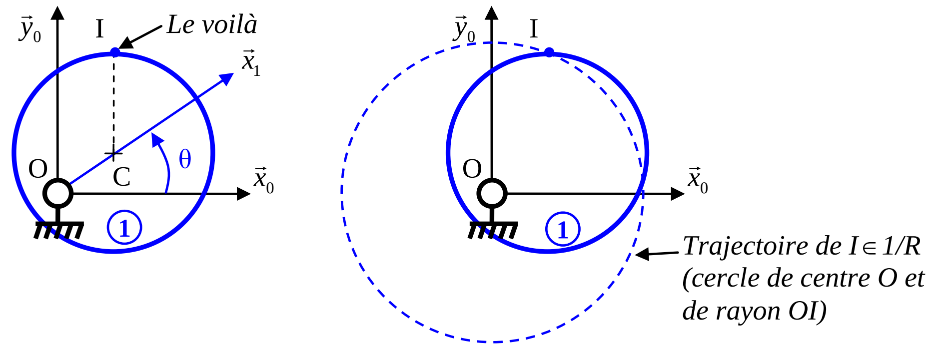


I peut appartenir au solide 2 :



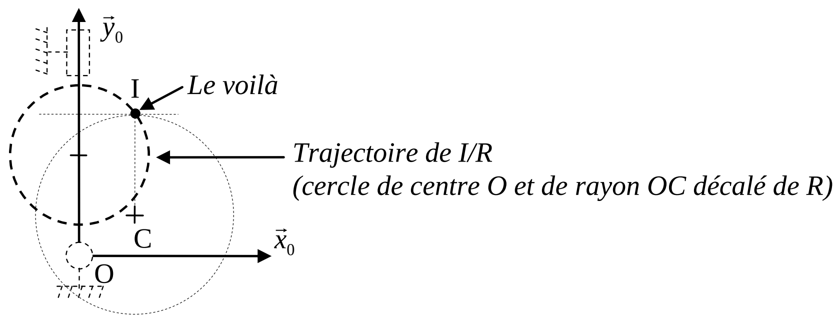
Nature du mouvement de $I \in 2/R$: translation rectiligne d'axe $(A, \vec{y}_0)$

I peut appartenir au solide 1 :



Nature du mouvement de $I \in 1/R$: rotation autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$

I peut être point coïncident de contact :



5.3. Vitesse de glissement

<u>Définition :</u> On appelle vecteur vitesse de glissement en I de S_2/S_1 le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V_{I\in S_2/S_1}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_{I\in S_2/S_0}}} - \overrightarrow{\boldsymbol{V_{I\in S_1/S_0}}}$$

Le vecteur vitesse de glissement $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{I\in S_2/S_1}}}$ est nécessairement contenu dans le plan tangent (π). En effet, son produit scalaire avec la normale est nul.

Elle est indépendante du repère de référence.

5.4. Méthode de calcul pour le vecteur vitesse de glissement

<u>Pour calculer une vitesse de glissement, il ne faut jamais utiliser la dérivation vectorielle.</u>
La méthode consiste à utiliser la composition des vecteurs vitesse et la formule du solide pour calculer chacune des vitesses.

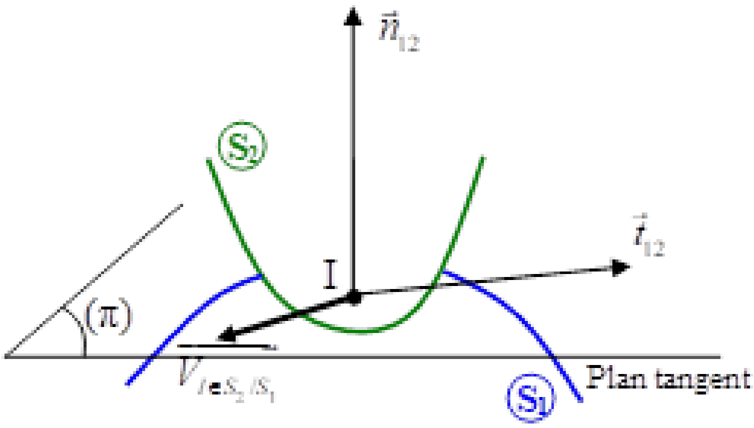
5.5. Condition de roulement sans glissement

La condition de roulement sans glissement en I de S_2/S_1 s'écrit $\overrightarrow{\boldsymbol{V_{I\in S_2/S_1}}} = \vec{\mathbf{0}}$.

L'exploitation de cette relation est utile pour l'étude de très nombreux mécanismes.

<u>Vitesse de rotation de roulement et vitesse de rotation de pivotement</u>

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}}$ étant connu, on peut le décomposer en la somme de deux vecteurs :



- Le vecteur normal au plan (π) est le vecteur vitesse de rotation de pivotement de S_2/S_1. On le note $\overrightarrow{\Omega \mathrm{p}_{S_2/S_1}}$. Son expression est donnée par $\overrightarrow{\Omega \mathrm{p}_{S_2/S_1}} = (\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}}.\vec{n}).\vec{n}$

- Le vecteur contenu dans le plan (π) est le vecteur vitesse de rotation de roulement de S_2/S_1. On le note $\overrightarrow{\Omega \mathrm{r}_{S_2/S_1}}$. Son expression est donnée par $\overrightarrow{\Omega \mathrm{r}_{S_2/S_1}} = \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} - \overrightarrow{\Omega \mathrm{p}_{S_2/S_1}}$

$$\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathrm{p}_{S_2/S_1}}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathrm{r}_{S_2/S_1}}}$$

Il est suivant la normale au contact

Il appartient au plan tangent

En général, au contact ponctuel de deux solides, il y a roulement, pivotement et glissement. Nous pouvons alors retrouver les cas suivants :

	$\overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} = \vec{0}$	$\overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} \neq \vec{0}$
$\overrightarrow{\Omega_N} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_T} = \vec{0}$	Adhérence	Glissement pur
$\overrightarrow{\Omega_N} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_T} = \vec{0}$	Pivotement sans glissement (pivotement pur)	Glissement avec pivotement
$\overrightarrow{\Omega_N} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_T} \neq \vec{0}$	Roulement sans glissement (roulement pur)	Glissement avec roulement
$\overrightarrow{\Omega_N} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\Omega_T} \neq \vec{0}$	Roulement avec pivotement sans glissement	Glissement avec roulement et pivotement

5.6. Condition de maintien du contact

Si, entre deux solides S_1 et S_2, il existe un ou des contacts, ceux-ci vont imposer n relations indépendantes sur les possibilités de mouvement entre les deux solides.

Soient deux solides S_1 et S_2 en contact en un point I, avec $\vec{n}$ la normale au contact et $\vec{t}$ un vecteur appartenant au plan tangent au contact. Alors la condition de maintien du contact s'écrit :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_{I\in S_2/S_1}} \cdot \vec{n} = 0}$$

Ainsi, selon le contact entre deux classes d'équivalence, le torseur associé prend une forme particulière. On en dégage une sous-classe de torseurs particuliers, permettant de définir des liaisons normalisées.

6. Méthode classique de la cinématique des solides

Pour résoudre un problème de cinématique ou pour trouver la vitesse d'un point d'un solide en mouvement par rapport à un référentiel, on adopte souvent la démarche suivante :

Décomposer la vitesse en mouvements élémentaires (rotation ou translation) grâce à la relation de composition des vecteurs vitesse.

Par exemple : $\overrightarrow{V(M \in 3/0)} = \overrightarrow{V(M \in 3/2)} + \overrightarrow{V(M \in 2/1)} + \overrightarrow{V(M \in 1/0)}$

Selon les mouvements élémentaires obtenus :

- Si le mouvement élémentaire est une **rotation**, utiliser la **formule de changement de point** en passant par un point appartenant à l'axe de rotation (vitesse nulle sur l'axe de rotation). Par exemple si 1/0 est une rotation et que **A appartient à l'axe de rotation de 1/0**, alors : $\boldsymbol{\overrightarrow{V(M \in 1/0)} = \vec{0} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}}$

- Si le mouvement élémentaire est une **translation** alors la **vitesse est la même pour tous les points du solide**. On utilise alors la formule de dérivation vectorielle en prenant un point qui appartient réellement au solide et pour lequel le vecteur position est simple à exprimer. Par exemple si 2/1 est une translation, P un point appartenant à 2 et O_1 un point fixe dans R_1, alors $\boldsymbol{\overrightarrow{V(M \in 2/1)} = \overrightarrow{V(P \in 2/1)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right]_{R_1}}$
  <u>Autre méthode (plus rapide) :</u> On utilise la **dérivée du paramètre qui varie**, **selon l'axe du mouvement** : si le point M varie de $x(t)$ dans le sens $\vec{x}$ alors $\boldsymbol{\overrightarrow{V(M \in 2/1)} = \dot{x}(t).\vec{x}}$

- Si le mouvement est une **combinaison de rotation(s) et de translation(s)** et que l'on ne peut pas les décomposer, **on cherche un point du solide pour lequel on peut trouver la vitesse par dérivation vectorielle (attention aux conditions d'appartenance) ou un point pour lequel la vitesse est donnée puis on utilise la relation de changement de point**. Par exemple,
  si je connais la vitesse de $B \in 3$ pour le mouvement de 3/2 alors je peux déterminer $\boldsymbol{\overrightarrow{V(M \in 3/2)} = \overrightarrow{V(B \in 3/2)} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}}}$. Je peux utiliser la composition des vecteurs rotation pour $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$.