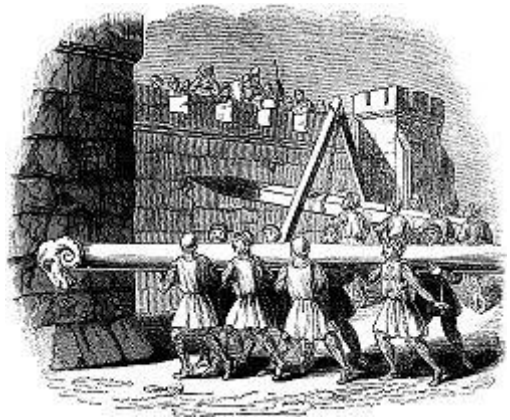
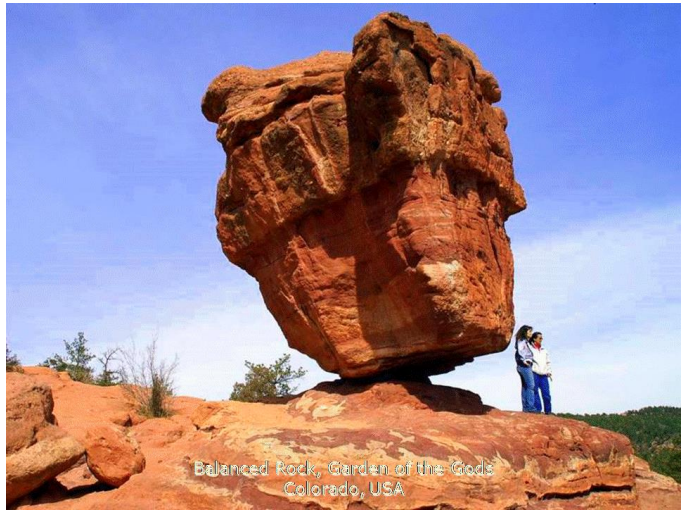
Statique du Solide



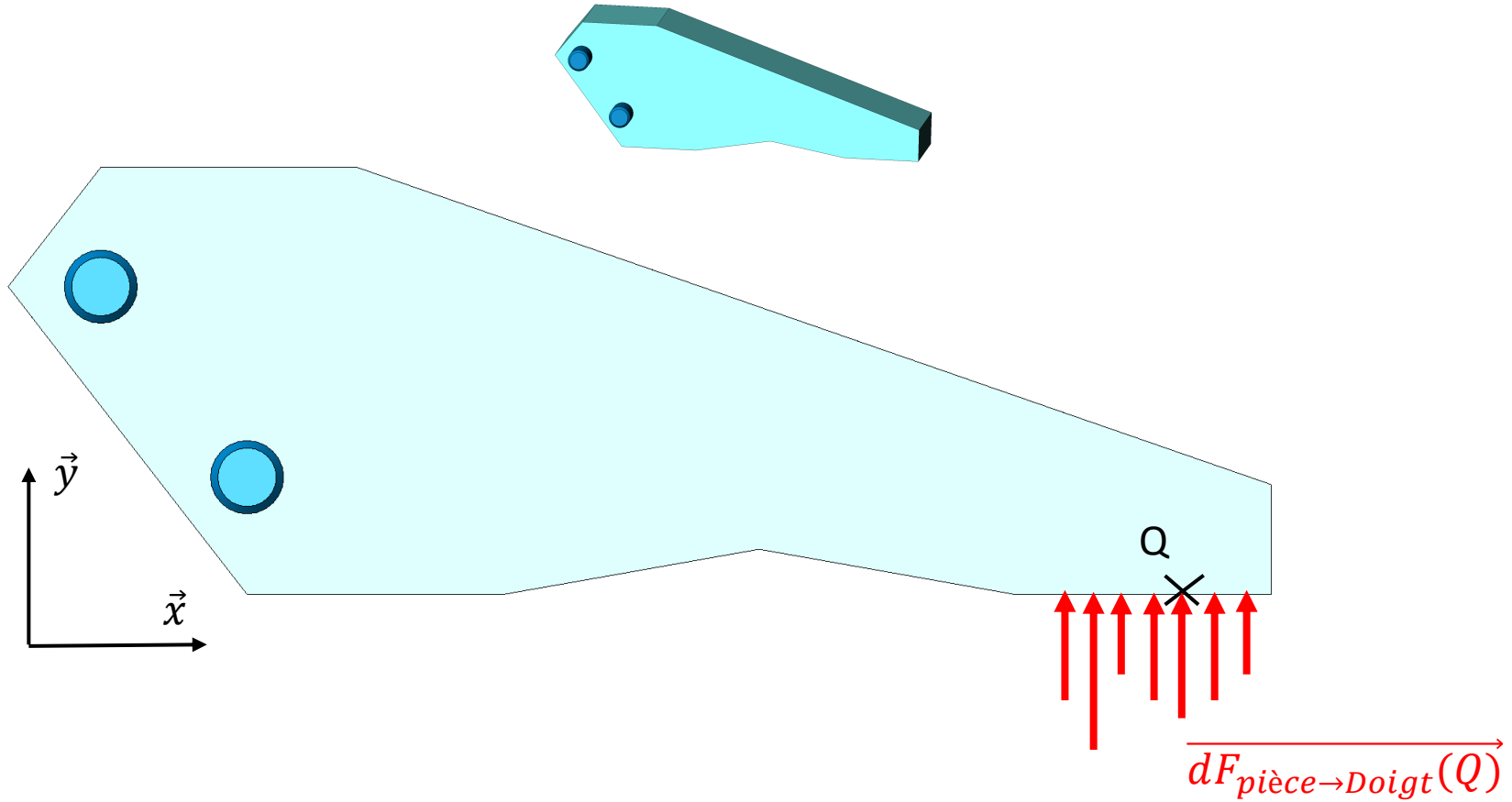


Modélisation des Actions Mécaniques

Compétences attendues :

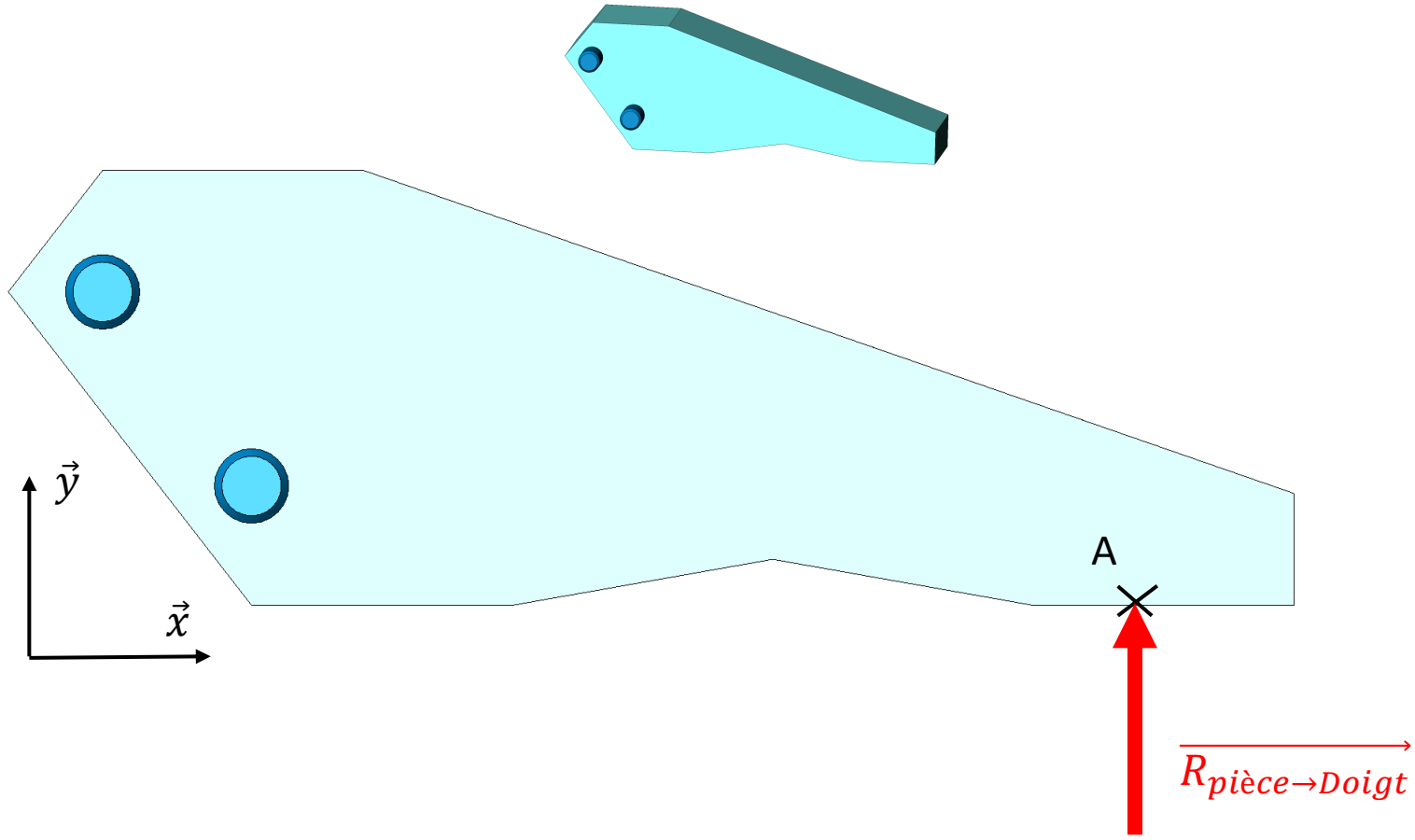
- ✓ Modéliser une action mécanique.

Modélisation globale - locale



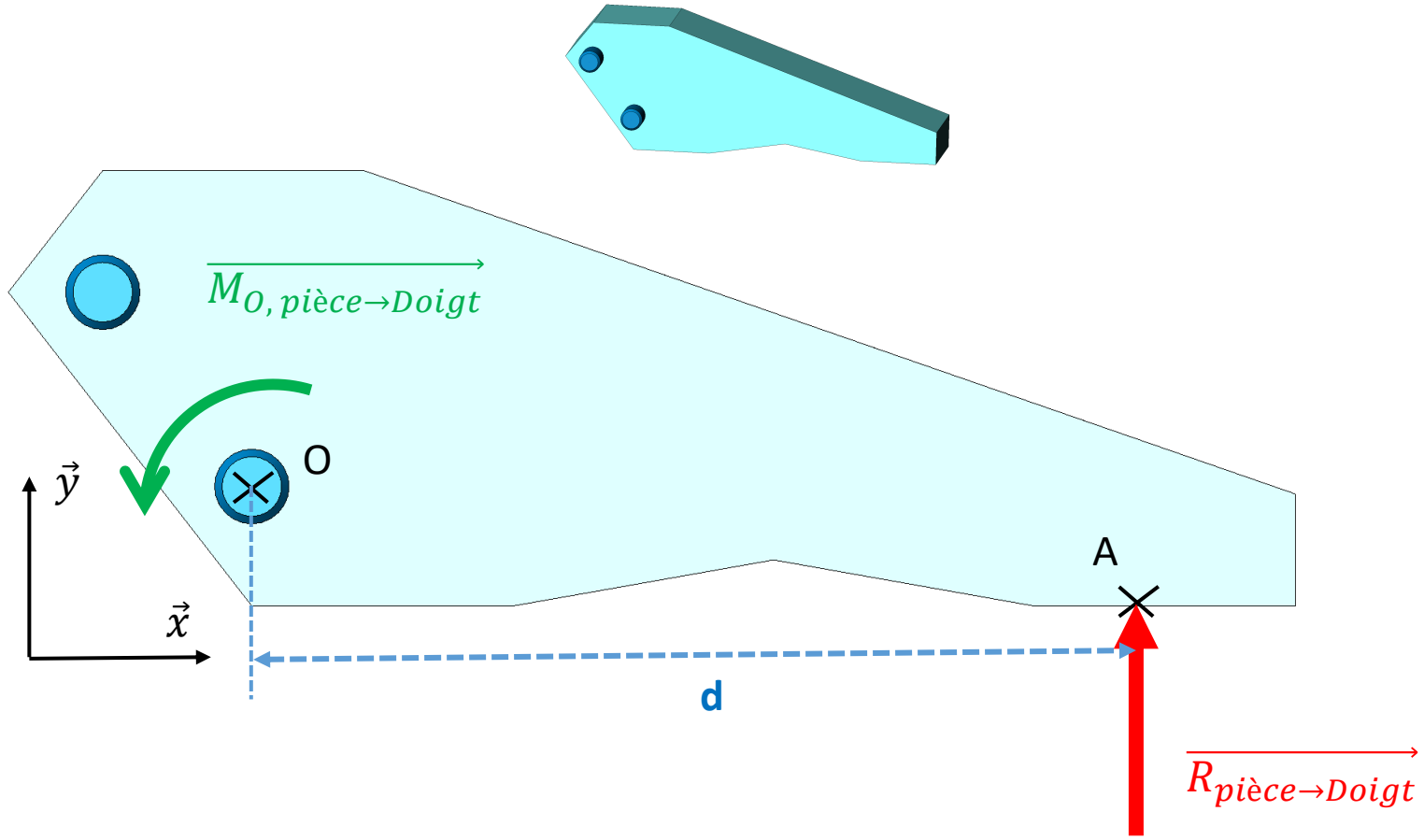
Modèle local réalisé par des champs de vecteurs

Modélisation globale - locale



Modèle global réalisé par des champs de torseurs

Modélisation globale - locale



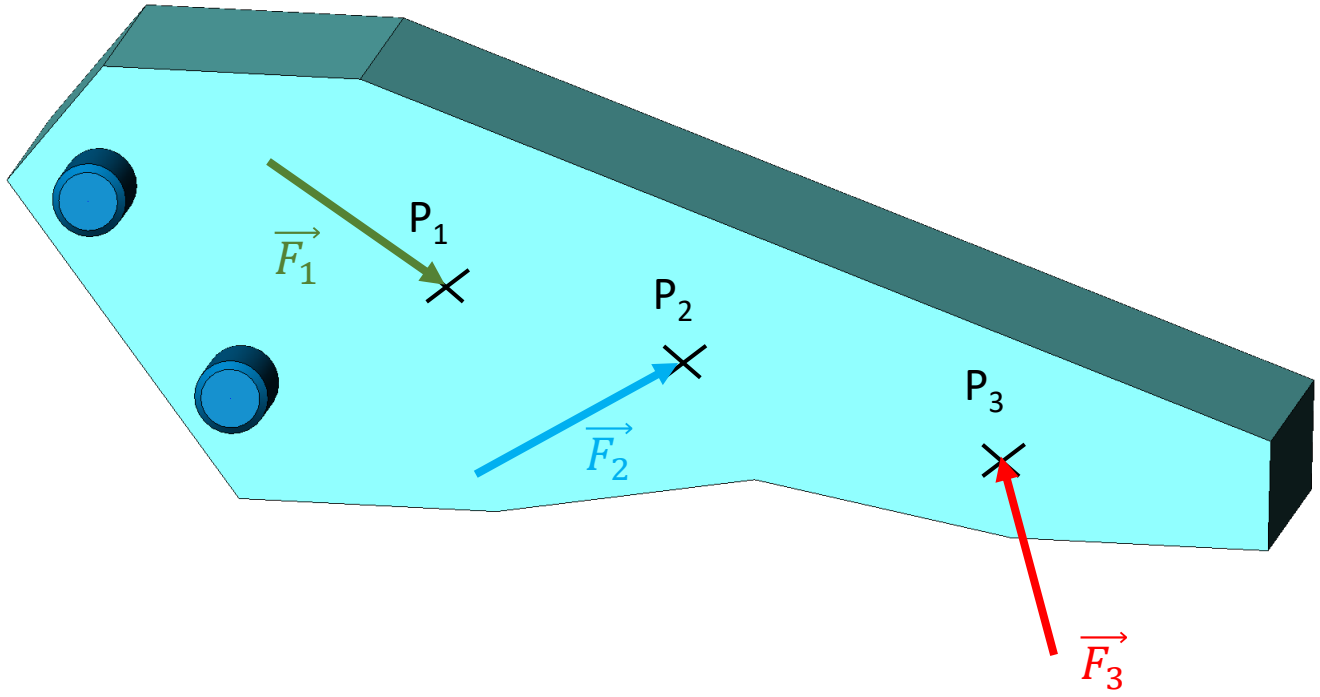
Modèle global réalisé par des champs de torseurs

Modélisation globale - locale

Répartition des actions mécaniques

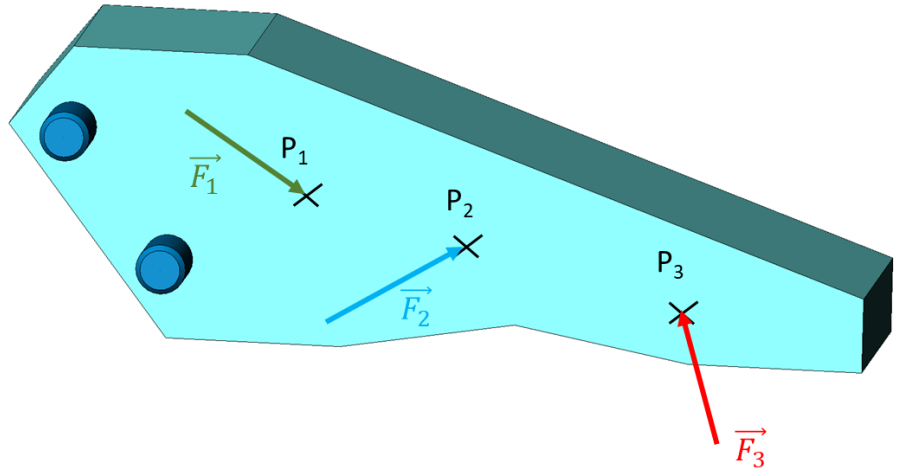
Solide = Ensemble de points matériels P_i

P_i → Action mécanique élémentaire $\overrightarrow{F_i}$



Modélisation globale - locale

Répartition des actions mécaniques



Effet local de l'action mécanique $\overrightarrow{F_i}$ en P_i → Torseur :

$$\{dT_{i\to S}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{dR_{i\to S}} = \overrightarrow{F_i} \\ \overrightarrow{dM_{P_i,i\to S}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{P_i}$$

Effet global de ces actions mécaniques $\overrightarrow{F_i}$ → Torseur :

$$\{T_{i\to S}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{i\to S}} = \sum_i \overrightarrow{dR_{i\to S}} = \sum_i \overrightarrow{F_i} \\ \overrightarrow{M_{A,i\to S}} = \sum_i \overrightarrow{dM_{A,i\to S}} = \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_i} \end{Bmatrix}_A$$

Modélisation globale - locale

Modèle de torseur des actions mécaniques locales

Domaine Ω :

- Un volume
- Une surface
- Une ligne

Torseur des actions mécaniques locales au point M :

$$\{dT\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)}.d\Omega \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$$

$\overrightarrow{eff(M)}$ = **densité d'efforts** (dépend de la position du point M)

Modélisation globale - locale

Modèle de torseur des actions mécaniques locales

3 cas :

- Ω = volume :

$$\{dT\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)}.dV \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$$

$\overrightarrow{eff(M)}$ = **densité volumique** d'efforts

- Ω = surface :

$$\{dT\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)}.dS \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$$

$\overrightarrow{eff(M)}$ = **densité surfacique** d'efforts

- Ω = ligne :

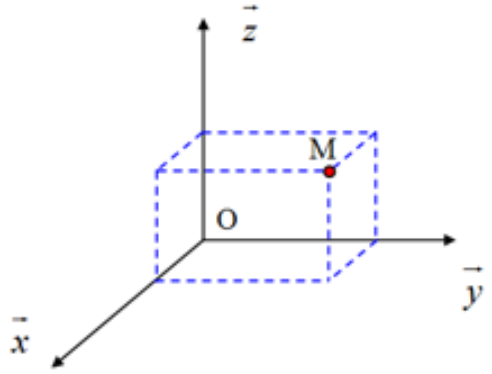
$$\{dT\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)}.dL \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$$

$\overrightarrow{eff(M)}$ = **densité linéique** d'efforts

Modélisation globale - locale

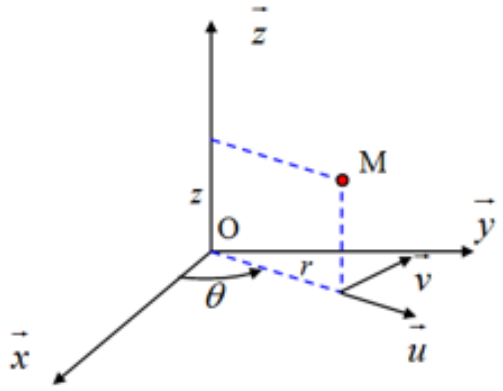
Modèle de torseur des actions mécaniques locales

Coordonnées cartésiennes



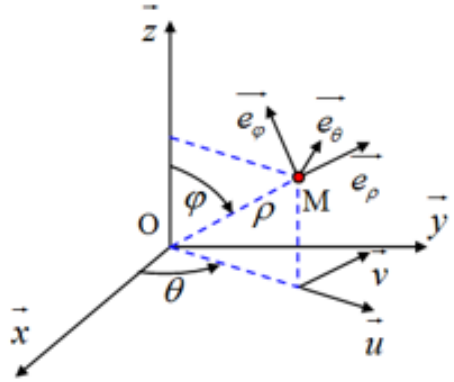
$$dS = dx.dy$$
$$dV = dx.dy.dz$$

Coordonnées cylindriques



$$dS = r.d\theta.dz$$
$$dV = r.d\theta.dz.dr$$

Coordonnées sphériques



$$dS = r^2.sin\varphi.d\varphi.d\theta$$
$$dV = r^2.sin\varphi.d\varphi.d\theta.dr$$

Elément d'intégration en fonction du système de coordonnées

Modélisation globale - locale

Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Torseur des actions mécaniques global en un point A

(intégrale de l'ensemble des actions mécaniques locales en tout point du solide)

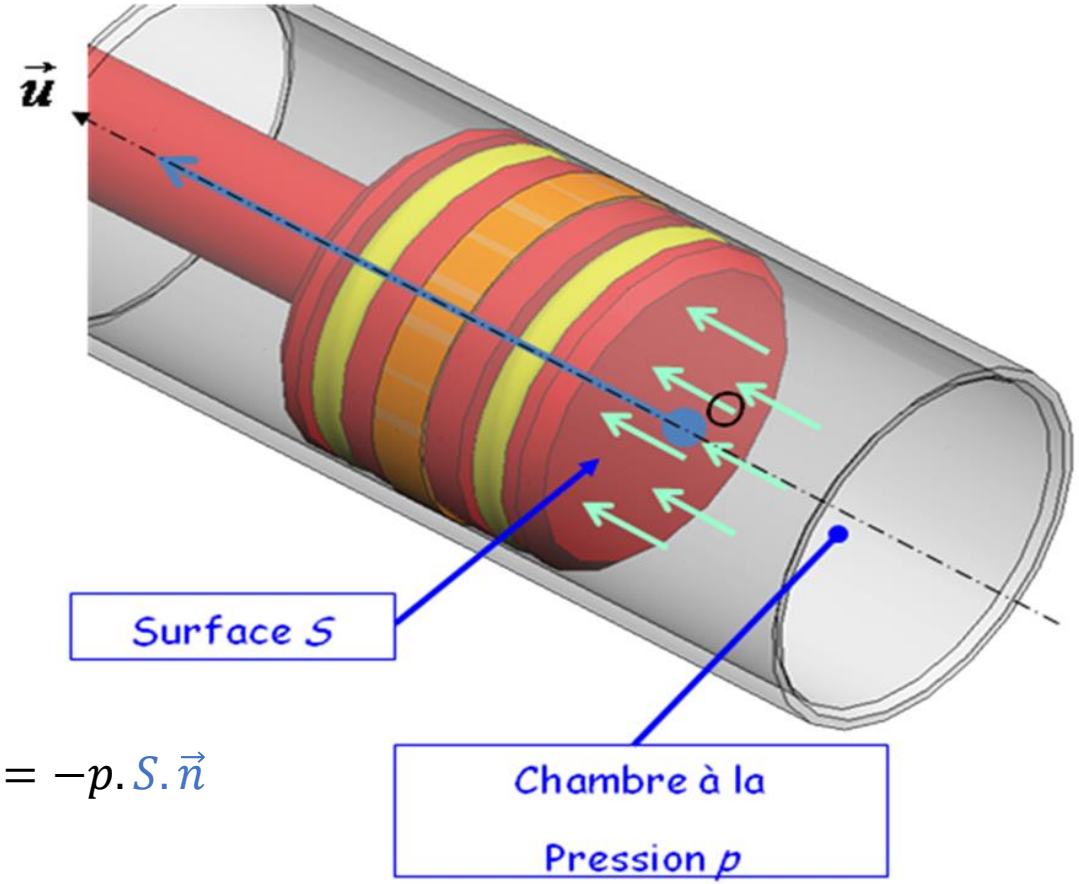
$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \int_{\Omega} \overrightarrow{dF(M)} = \int_{\Omega} \overrightarrow{eff(M)}\, d\Omega \\ \overrightarrow{M_A} = \int_{\Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}.\, d\Omega \end{array} \right\}_A$$

Modélisation globale - locale

Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple des actions d'un fluide sur un piston :

$$\{T_{Fluide\rightarrow Piston}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} = \int_{M\in S} \overrightarrow{dF(M)} \\ \overrightarrow{M_O} = \int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF(M)} \end{array} \right\}_O$$



Pour tout point M de la surface utile S du piston

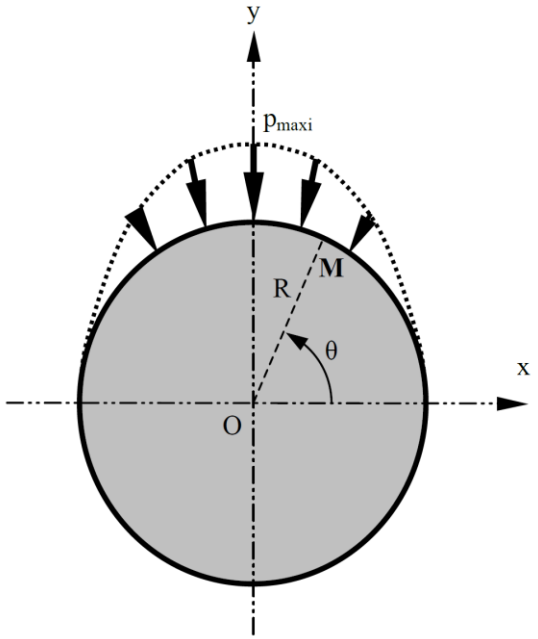
$$\vec{F} = \int_{M\in S} \overrightarrow{dF(M)} = \int_{M\in S} p.\overrightarrow{dS(M)} = p.\int_{M\in S} \overrightarrow{dS(M)} = -p.\int_{M\in S} dS.\vec{n} = -p.S.\vec{n}$$

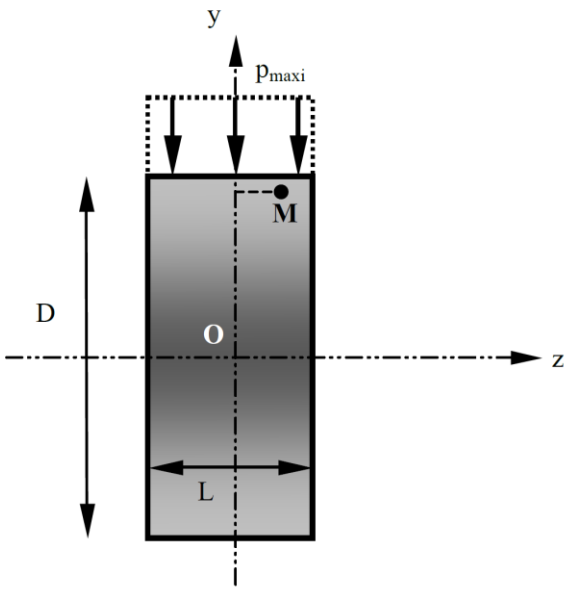
Modélisation globale - locale

Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple de pression sur un coussinet :

$$\{T_{Ext\rightarrow Coussinet}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} = \int_{M\in S} \overrightarrow{dF(M)} \\ \overrightarrow{M_O} = \int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF(M)} \end{array} \right\}$$



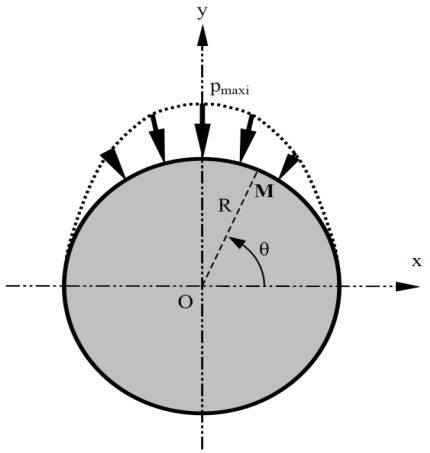


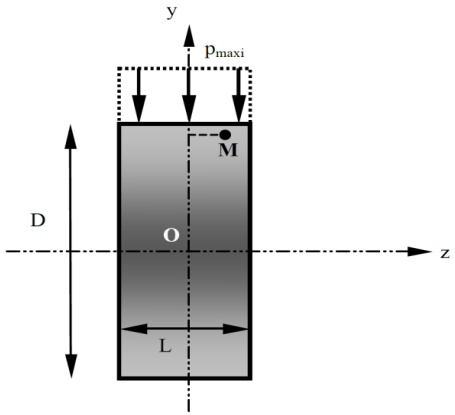
Modélisation globale - locale

Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple de pression sur un coussinet :

$$\overrightarrow{M_O} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}.dS = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge -p(\theta).dS.\vec{n}$$





Avec

- $\vec{n} = \overrightarrow{e_r}$
- $dS = R.d\theta.dz$
- $0 \leq \theta \leq \pi$
- $-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$
- $\overrightarrow{OM} = R.\overrightarrow{e_r} + z.\vec{z}$

Modélisation globale - locale

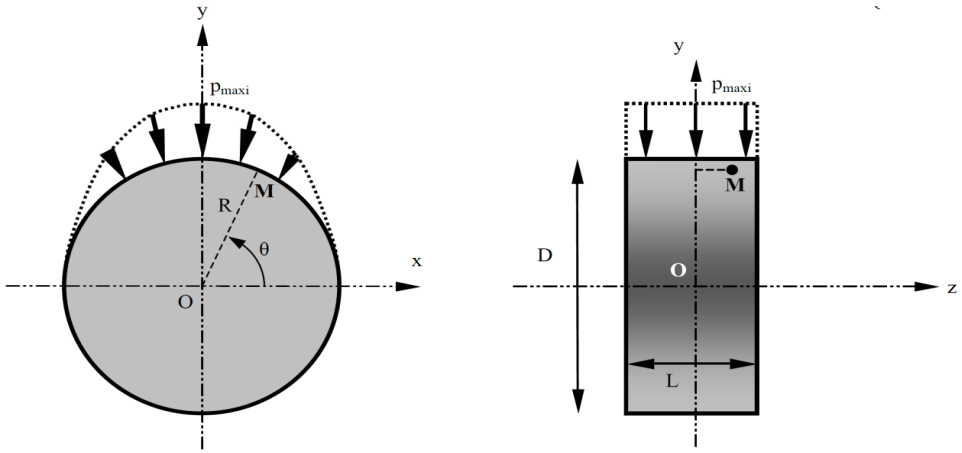
Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple de pression sur un coussinet :

$$\overrightarrow{M_O} = \int_0^{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (R.\overrightarrow{e_r} + z.\vec{z}) \wedge -p_M.\sin(\theta).R.d\theta.dz.\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{M_O} = -\int_0^{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p_M.\sin(\theta).R.d\theta.z.dz.\overrightarrow{e_\theta}$$

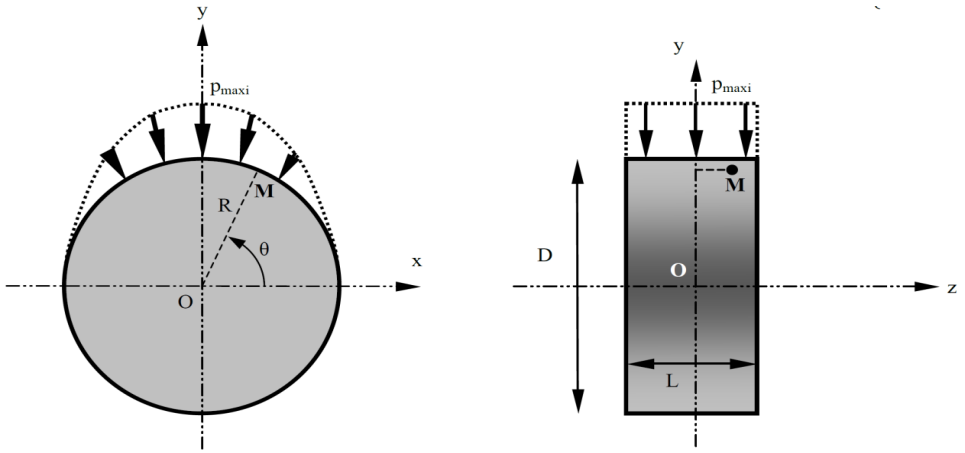
$$\overrightarrow{M_O} = -\int_0^{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p_M.\sin(\theta).R.d\theta.z.dz.(\sin(\theta).\vec{x} + \cos(\theta).\vec{y})$$



Modélisation globale - locale

Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple de pression sur un coussinet :



$$\overrightarrow{M_O} = -\int_0^{\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p_M.\sin^2(\theta).R.d\theta.z.dz.\vec{x} - \int_0^{\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p_M.\cos(\theta).\sin(\theta).R.d\theta.z.dz.\vec{y}$$

$$\overrightarrow{M_O} = -p_M.R.\vec{x}\int_0^{\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin^2(\theta).d\theta.z.dz - p_M.R.\vec{y}\int_0^{\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(\theta).\sin(\theta).d\theta.z.dz$$

Modélisation globale - locale

Modèle de torseur des actions mécaniques globales

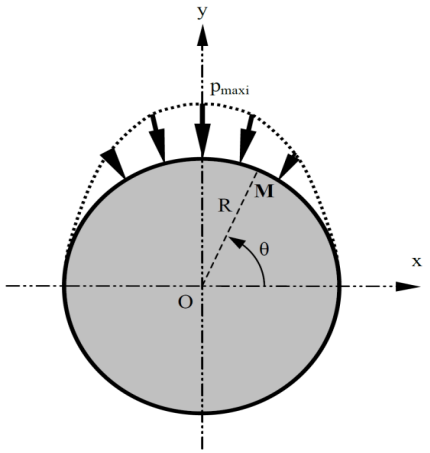
Exemple de pression sur un coussinet :

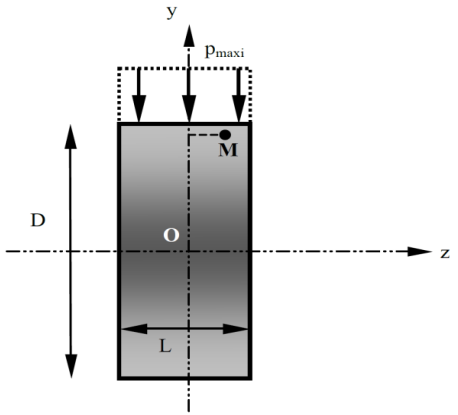
$$\overrightarrow{M_O} = -p_M.R.\vec{x}\int_0^{\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin^2(\theta).d\theta.z.dz - p_M.R.\vec{y}\int_0^{\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(\theta).\sin(\theta).d\theta.z.dz$$

On a $\int \sin(\theta).\cos(\theta) = \left[\frac{sin^2(\theta)}{2}\right]$ et $\int \sin^2(\theta) = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2.\theta)}{4}\right]$

$$\overrightarrow{M_O} = -p_M.rR.\vec{x}.\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}.\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2.\theta)}{4}\right]_0^{\pi} - p_M.R.\vec{y}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}.\left[\frac{sin^2(\theta)}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{M_O} = \vec{0}}$$





Modélisation globale - locale

Modèle de torseur des actions mécaniques globales

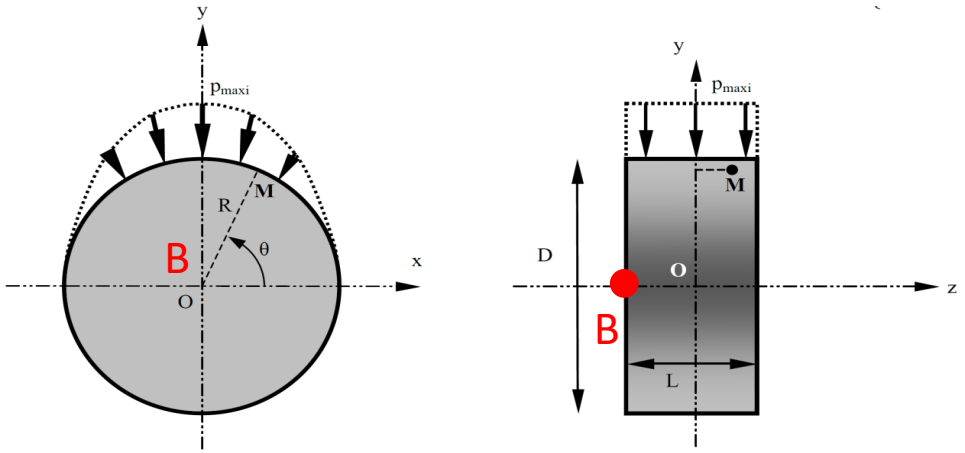
Exemple de pression sur un coussinet :

SI MEME CALCUL MAIS AU POINT B

$$\overrightarrow{M_B} = -p_M.R.\vec{x}\int_0^{\pi}\int_0^{L}\sin^2(\theta).d\theta.z.dz - p_M.R.\vec{y}\int_0^{\pi}\int_0^{L}\cos(\theta).\sin(\theta).d\theta.z.dz$$

On a $\int \sin(\theta).\cos(\theta) = \left[\frac{sin^2(\theta)}{2}\right]$ et $\int \sin^2(\theta) = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2.\theta)}{4}\right]$

$$\overrightarrow{M_B} = -p_M.rR.\vec{x}.\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^L.\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2.\theta)}{4}\right]_0^{\pi} - p_M.R.\vec{y}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^L.\left[\frac{sin^2(\theta)}{2}\right]_0^{\pi}$$



$$\mathbf{0 \le z \le L}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{M_B} = -\frac{p_M.r.\pi.L^2}{4}.\vec{x}}$$

Modélisation globale - locale

Centre de poussée d'une répartition de forces

<u>Définition :</u> Le centre de poussée des actions mécaniques agissant sur le domaine Ω et résultant de la densité d'effort $\overrightarrow{eff(M)}$ est le point P tel que :

$$\{T_{f\to S}\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_{f\to S}} = \int_{\Omega} \overrightarrow{eff(M)}d\Omega \\ \overrightarrow{M_{P,f\to S}} = \vec{0} \end{array}\right\}_P$$

<u>Remarque</u> : Centre de poussée des actions mécaniques de pesanteur = Centre de gravité.

Modélisation globale - locale

Centre de poussée d'une répartition de forces

Trouver la position du point P : (Condition de nullité du moment en P) :

$$\overrightarrow{M_{P,f\to S}} = \int_{\Omega} \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}.d\Omega = \vec{0}$$

Position / Origine du repère.

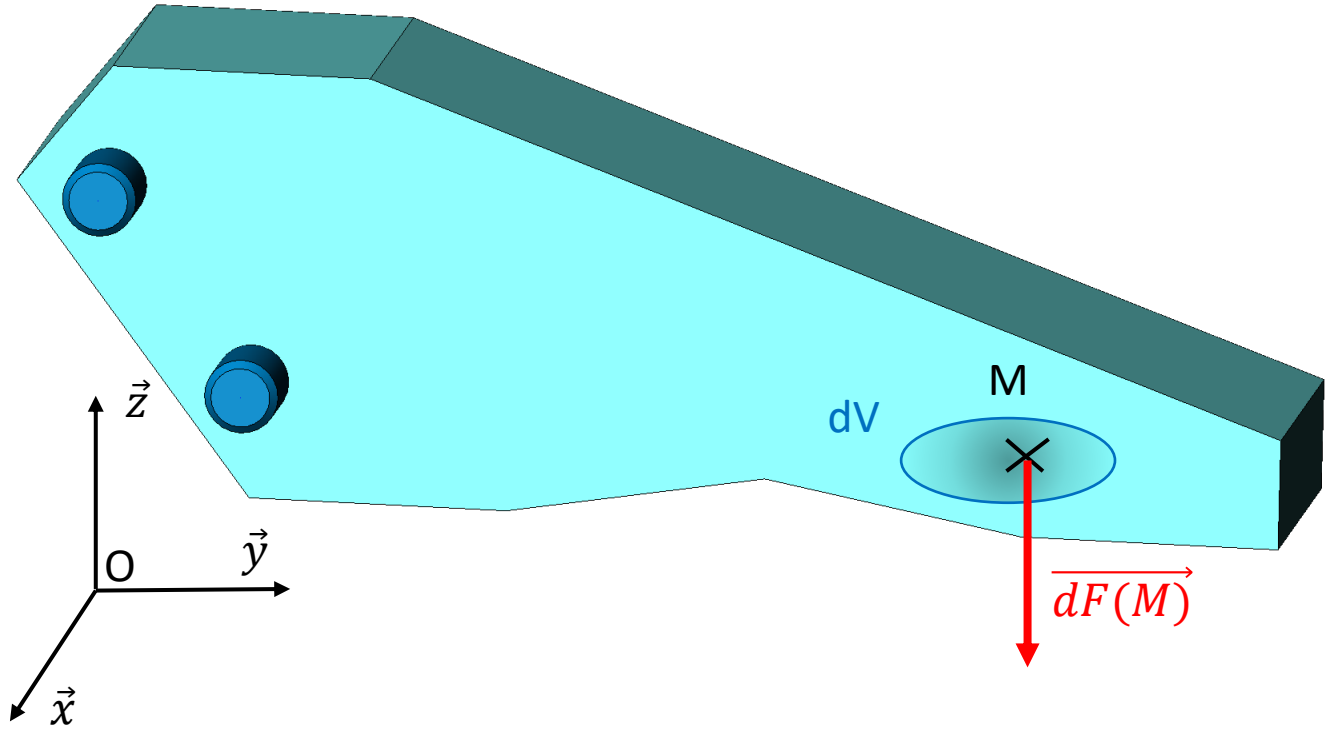
$$\int_{\Omega} \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \overrightarrow{eff(M)}.d\Omega = \vec{0}$$

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{eff(M)}.d\Omega = \int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}.d\Omega$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R_{f\to S}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}.d\Omega}$$

Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur



Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Pesanteur → Répartition volumique d'effort :

$\overrightarrow{eff(M)} = -\rho.g.\vec{z}$ avec $\vec{z}$ vertical ascendant.

g : accélération de la pesanteur (m/s^2)

ρ : masse volumique du corps (kg/m^3)

$$\{dT_{pes\to S}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{dR_{pes\to S}} = -\rho.g.dV.\vec{z} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_M$$

$$\{T_{pes\to S}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{pes\to S}} = \int_{M\in S} -\rho.g.dV.\vec{z} \\ \overrightarrow{M_{O,pes\to S}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge -\rho.g.dV.\vec{z}\end{matrix}\right\}_O$$

Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Si G = Centre de gravité :

$$\{T_{pes\to S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{pes\to S}} = \int_{M\in S} -\rho.g.dV.\vec{z} \\ \overrightarrow{M_{G,pes\to S}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge -\rho.g.dV.\vec{z} = \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{pes\to S}} = \vec{P} \\ \overrightarrow{M_{G,pes\to S}} = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

$\vec{P}$ = Poids du solide S.

$$\overrightarrow{R_{pes\to S}} = \int_{M\in S} -\rho.g.dV.\vec{z} = -\rho.g.\int_{M\in S} dV.\vec{z} = -\rho.g.V.\vec{z} = -m.g.\vec{z}$$

Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Définition du centre de gravité d'un solide

Centre de gravité G du solide S :

$$\int_{M\in S} \overrightarrow{GM}.dm = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM}.\rho.dV = \vec{0}$$

$$\int_{M\in S} \overrightarrow{GM}.dm = \int_{M\in S} (\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0M}).dm = \vec{0} \rightarrow \int_{M\in S} \overrightarrow{OG}.dm = \int_{M\in S} \overrightarrow{0M}.dm \rightarrow m.\overrightarrow{OG} = \int_{M\in S} \overrightarrow{0M}.dm$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}.\int_{M\in S} \overrightarrow{0M}.dm$$

Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Définition du centre de gravité d'un solide

Coordonnées de G dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$x_G = \frac{1}{m}.\int_{M\in S} x.dm \qquad y_G = \frac{1}{m}.\int_{M\in S} y.dm \qquad z_G = \frac{1}{m}.\int_{M\in S} z.dm$$

Remarque : Solide S = Ensemble de masses discrètes m_i de centres de gravité G_i :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}.\sum_i m_i \overrightarrow{OG_i}$$

Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Théorèmes de Guldin

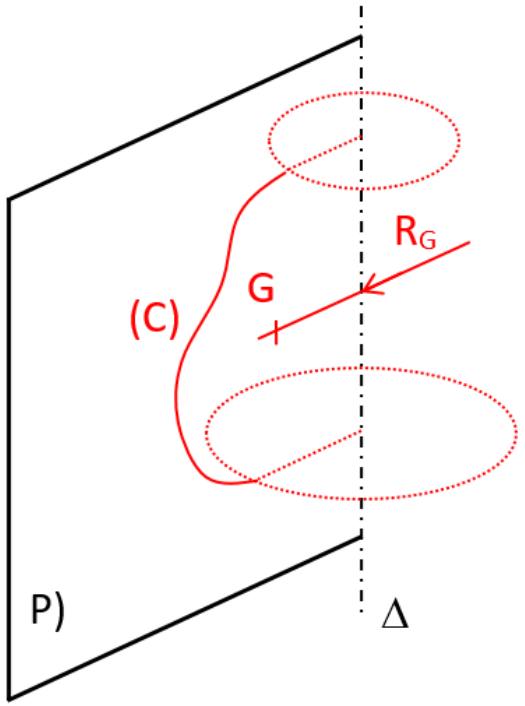
Premier théorème de Guldin :

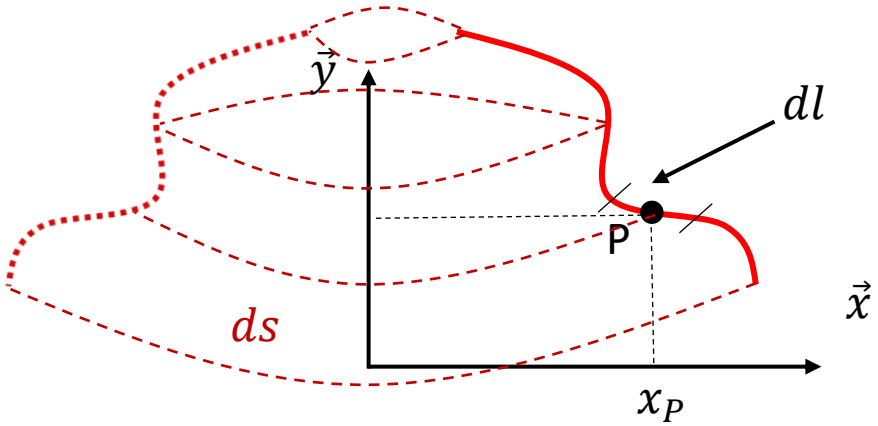
L'aire de la surface engendrée par une courbe plane C tournant autour d'un axe Δ de son plan P, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur L de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

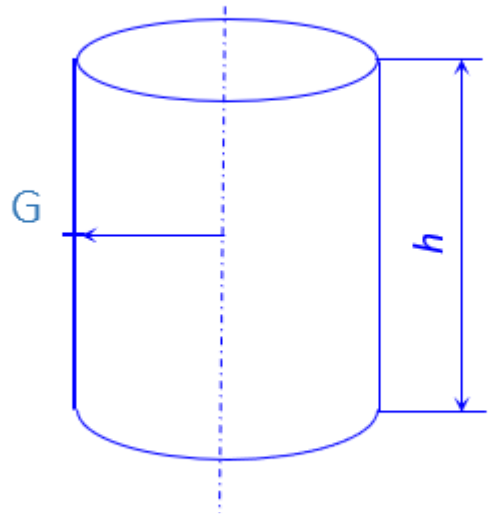
Théorèmes de Guldin





$$\boldsymbol{S = 2.\pi.R_G.L}$$

Application : Calcul de la surface d'un cylindre de révolution



Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Théorèmes de Guldin

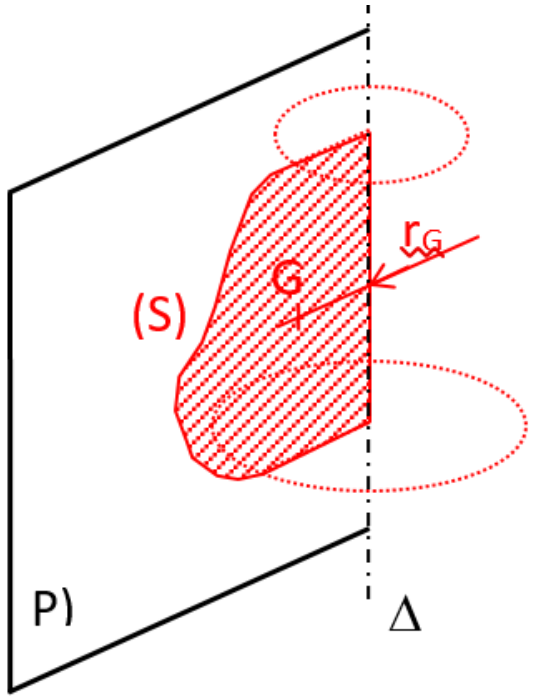
Deuxième théorème de Guldin :

Le volume engendré par une surface S plane tournant autour d'un axe Δ de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

Modélisation des actions mécaniques à distance

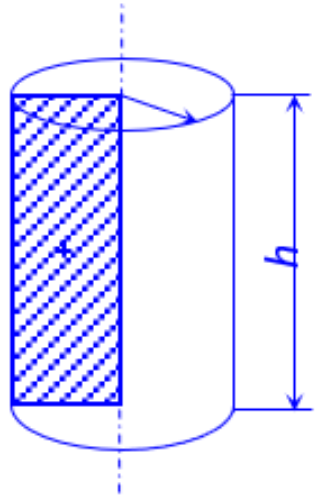
Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Théorèmes de Guldin



$$V = 2.\pi.r_G.S$$

Application : Calcul du volume d'un cylindre



Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

Hypothèses

- Les pièces mécaniques sont des solides indéformables.
- Les surfaces sont géométriquement parfaites.
- Les jeux sont nuls.
- **Le contact est sans frottement, ni adhérence.**

Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

Conséquence : La puissance des efforts de liaison = comoment de torseur :

$$P_{i\to j} = \{T_{i\to j}\} \otimes \{V_{i/j}\} = \overrightarrow{R_{i\to j}} . \overrightarrow{V_{M\in i/j}} + \overrightarrow{\Omega_{i/j}} . \overrightarrow{M_{M,i\to j}} = 0$$

$$P_{i\to j} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{M,R} \otimes \begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{M,R} = X.V_x + Y.V_y + Z.V_z + L.\Omega_x + M.\Omega_y + N.\Omega_z$$

Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

Exemple : Liaison Pivot d'axe $\vec{x}$ entre les solides 1 et 2 :

$$P_{1\to2} = \{T_{1\to2}\} \otimes \{V_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{M,R} \otimes \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{M,R} = 0$$

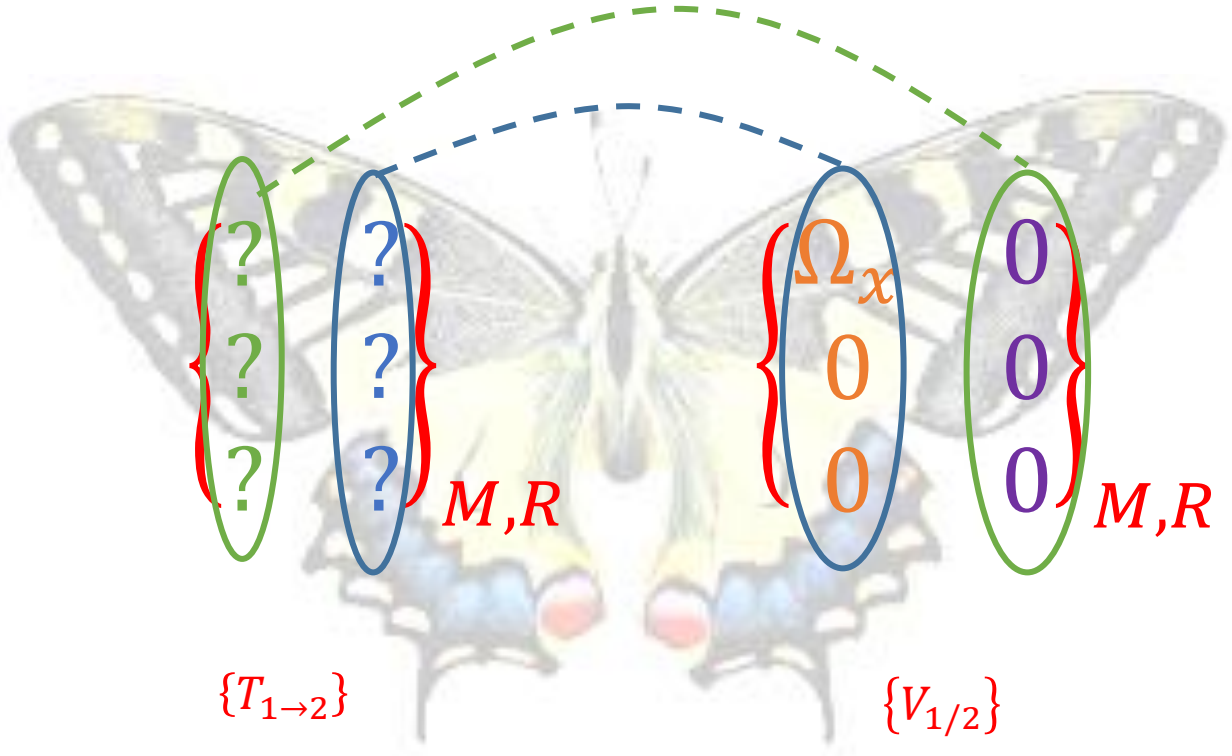
$$P_{i\to j} = X.0 + Y.0 + Z.0 + L.\Omega_x + M.0 + N.0 = 0 \text{ donc } L.\Omega_x = 0, \forall \Omega_x \text{ donc } L = 0$$

$$\{T_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{M,R}$$

Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

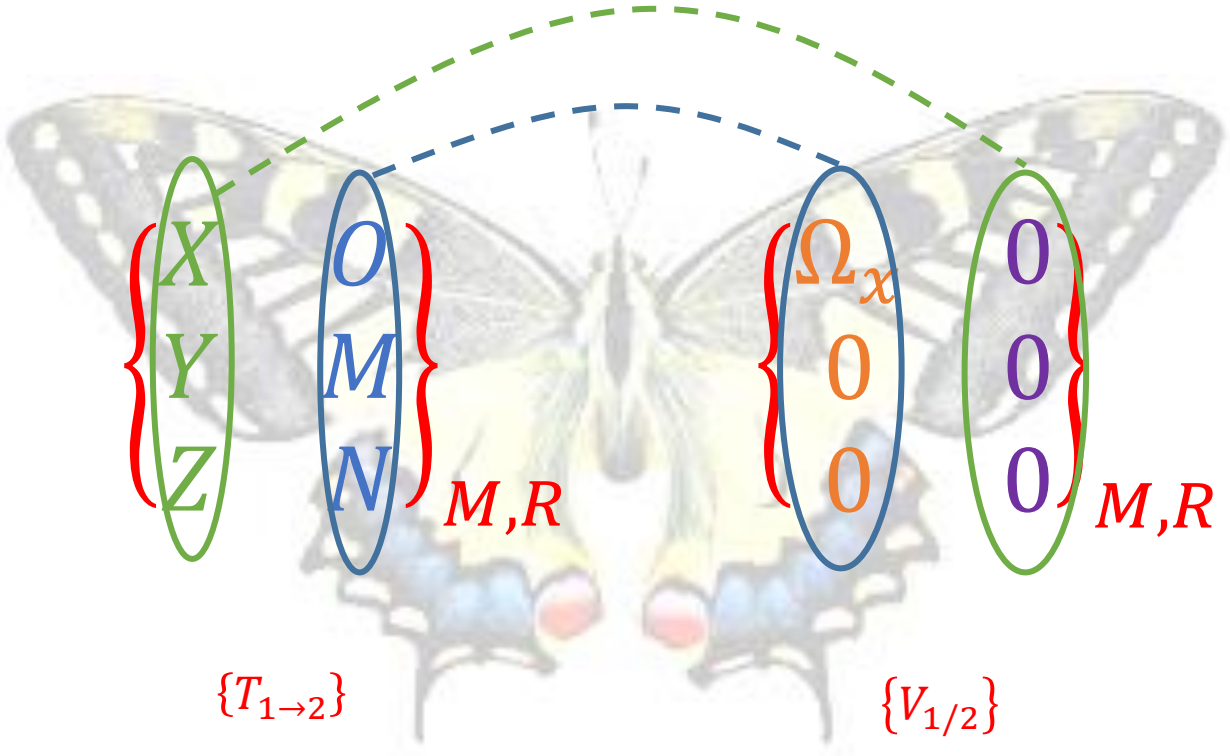
Exemple : Liaison Pivot d'axe $\vec{x}$ entre les solides 1 et 2 :



Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

Exemple : Liaison Pivot d'axe $\vec{x}$ entre les solides 1 et 2 :



Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

Exemple : Liaison Hélicoïdale d'axe $\vec{x}$ entre les solides 1 et 2 :

Avec $V_x = \Omega_x . \frac{pas}{2\pi}$

$$P_{1\to2} = \{T_{1\to2}\} \otimes \{V_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{M,R} \otimes \begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{M,R} = 0$$

$$P_{i\to j} = X.V_x + L.\Omega_x = 0 \quad \forall(\Omega_x, V_x) \text{ or } V_x = \Omega_x . \frac{pas}{2\pi} \text{ donc } L = -X . \frac{pas}{2\pi}$$

$$\{T_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{M,R}$$

Avec $L = -X . \frac{pas}{2\pi}$

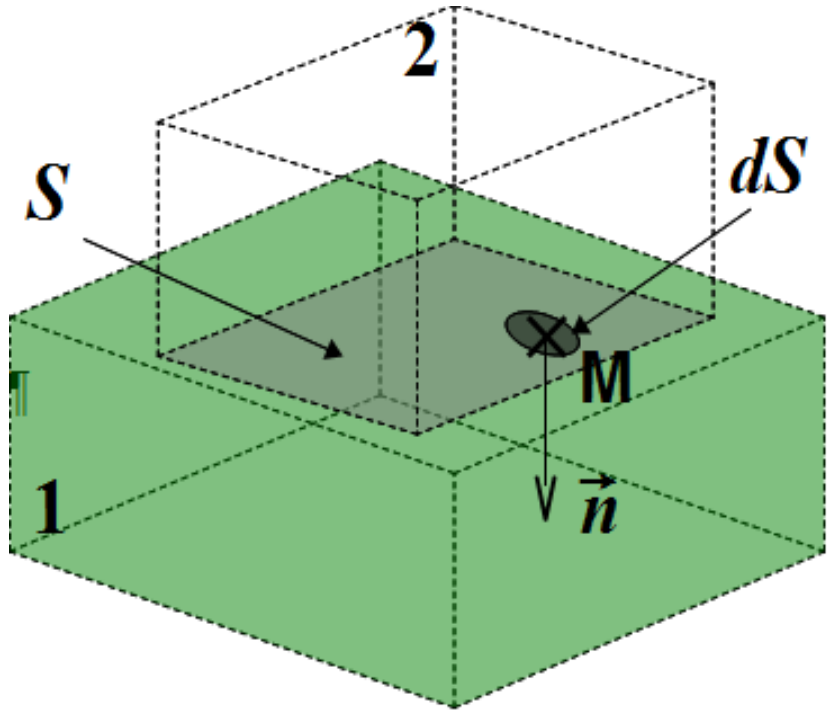
Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

Hypothèses → Efforts transmis entre 2 solides → perpendiculaires au plan tangent commun aux 2 solides.

- On isole S_2
- $\overrightarrow{dF_{1\to2}(M)}$ = AM élémentaire exercée par S_1 sur S_2 en M.
- $\overrightarrow{dF_{1\to2}(M)}$ → dirigée vers l'intérieur du solide isolé

$$\overrightarrow{dF_{1\to2}(M)} = -p(M).dS.\vec{n}(M)$$



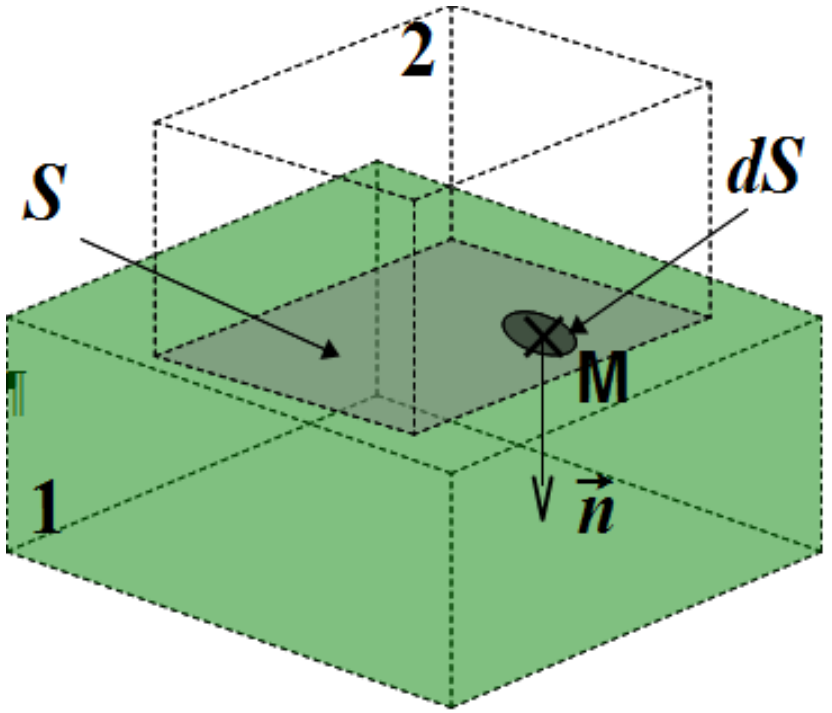
- $p(M)$ = pression de contact au point M (Pa = N/m²)
- $\vec{n}(M)$ = vecteur unitaire normal au plan tangent commun en M, <u>orienté vers l'extérieur du solide isolé.</u>

Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

- Torseur global des actions mécaniques exercé par S_1 sur S_2 en O :

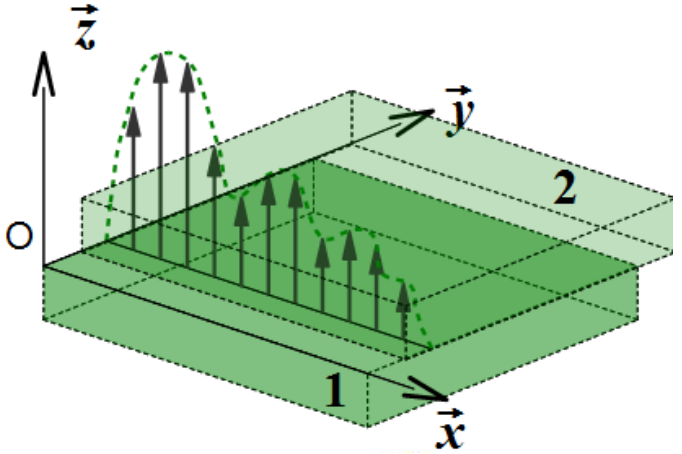
$$\{T_{1\to2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{1\to2}} = \int_{M\in S} -p(M).dS.\vec{n}(M) \\ \overrightarrow{M_{O,1\to2}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge -p(M).dS.\vec{n}(M) \end{array} \right\}_O$$



Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

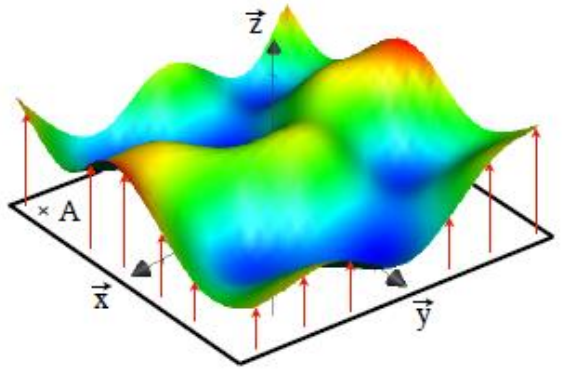
Actions mécaniques dans une liaison parfaite

Considérons une liaison appui-plan de normale $\vec{z}$ avec $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère local.



Torseur des actions mécaniques exercées par 1 sur 2

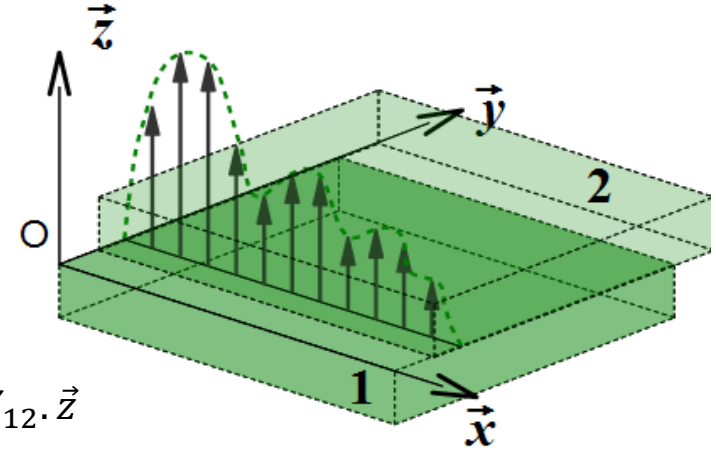
$$\{T_{1\to2}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to2}} \\ \overrightarrow{M_{O,1\to2}}\end{matrix}\right\}_O = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Actions mécaniques dans une liaison parfaite

Détermination de la forme du torseur : passage local-global



$$\overrightarrow{dF_{1\to2}(M)} = -p(M).dS.\vec{n}(M)$$

$$\overrightarrow{R_{1\to2}} = \int_{M\in S} -p(M).dS.\vec{n}(M) = \int_{M\in S} -p(M).dS.\vec{z} = Z_{12}.\vec{z}$$

avec $\vec{n}(M) = \vec{z}$ pour tout point M

$$\overrightarrow{M_{O,1\to2}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge -p(M).dS.\vec{n}(M) = \int_{M\in S} (x.\vec{x} + y.\vec{y}) \wedge -p(M).dS.\vec{z} = \int_{M\in S} (x.p(M).dS.\vec{y} - y.p(M).dS.\vec{x}) = M_{12}.\vec{y} + L_{12}.\vec{x}$$

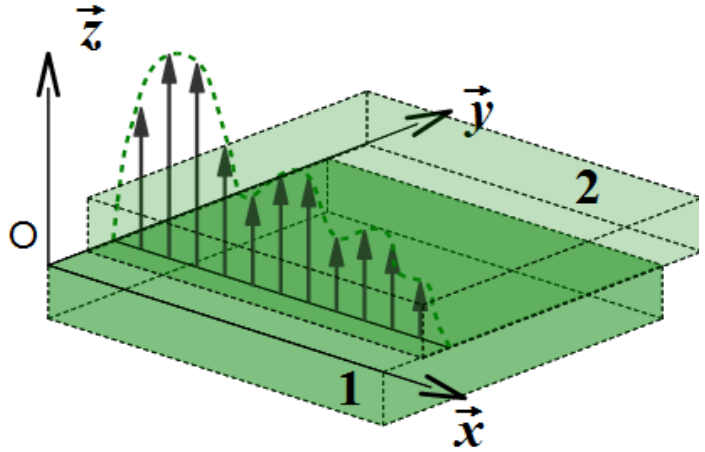
$$\to \{T_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Actions mécaniques dans une liaison parfaite

Détermination de la forme du torseur : complémentarité cinématique-statique

$\{T_{1\to 2}\}$ se déduit directement de $\{V_{2/1}\}$



Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

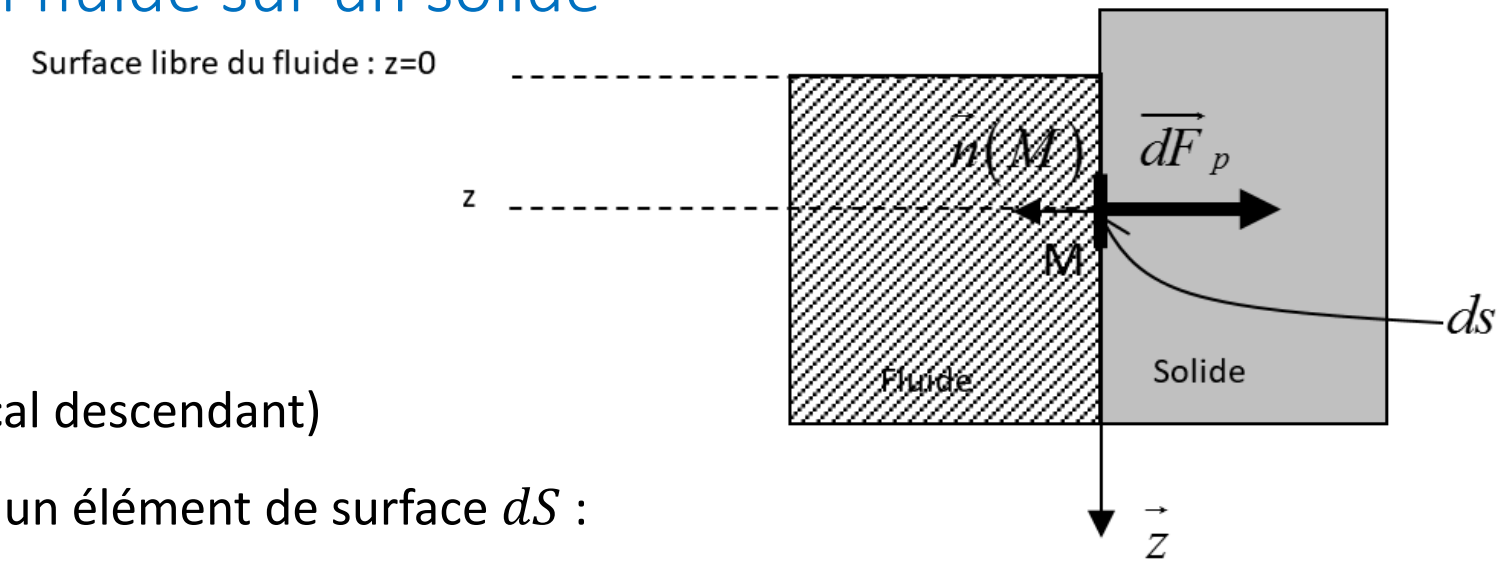
Action hydrostatique d'un fluide sur un solide

Les forces de pression exercent une action mécanique perpendiculairement à la surface du solide sur laquelle elles agissent.

La pression au point M varie selon la loi : $p(z) = \rho . g . z + cste$

Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Action hydrostatique d'un fluide sur un solide



Exemple :

ρ : masse volumique du fluide

g : accélération de la pesanteur

z : altitude du point M (axe $\vec{z}$ vertical descendant)

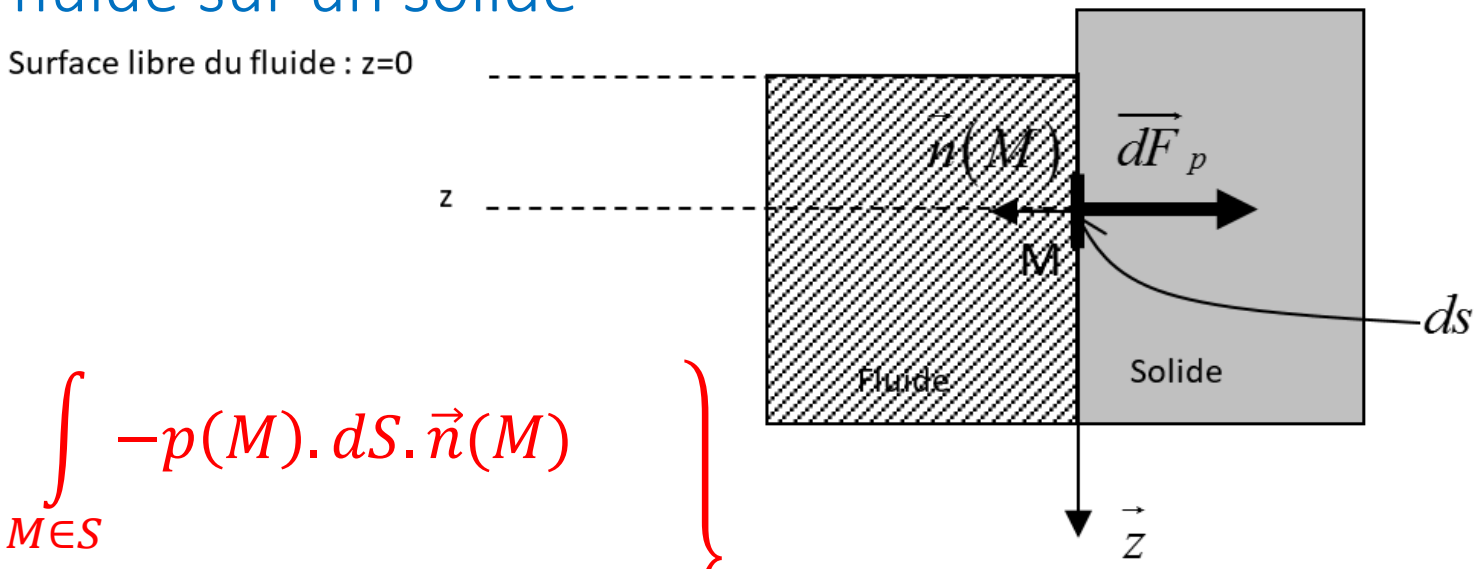
Effort élémentaire $\overrightarrow{dF_P}$ qui agit sur un élément de surface dS :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{dF_P}} = -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{M}).\boldsymbol{dS}.\vec{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$$

$\vec{n}(M)$: vecteur normal en M dirigé vers l'extérieur du solide isolé

Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Action hydrostatique d'un fluide sur un solide



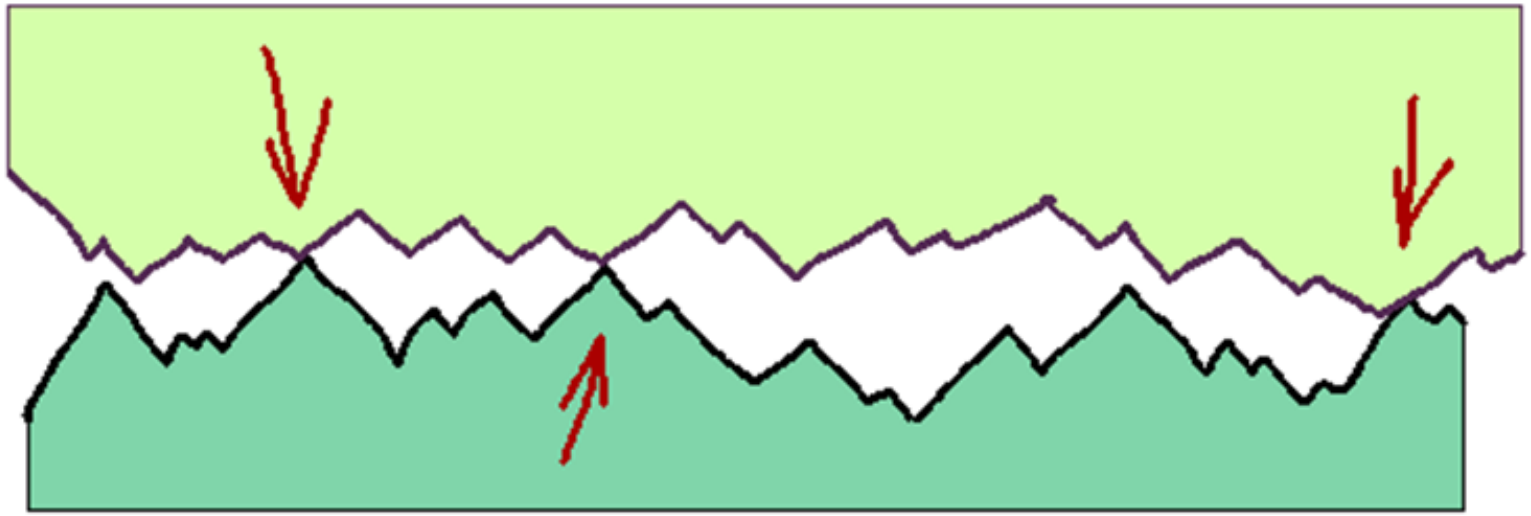
$$\{T_{Fluide\to S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{Fluide\to S}} = \int_{M\in S} -p(M).dS.\vec{n}(M) \\ \overrightarrow{M_{O,Fluide\to S}} = \int_{M\in S} \overrightarrow{OM} \wedge -p(M).dS.\vec{n}(M) \end{array} \right\}_O$$

Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

Contact surfacique ou linéique avec frottement

Modèle local avec frottement

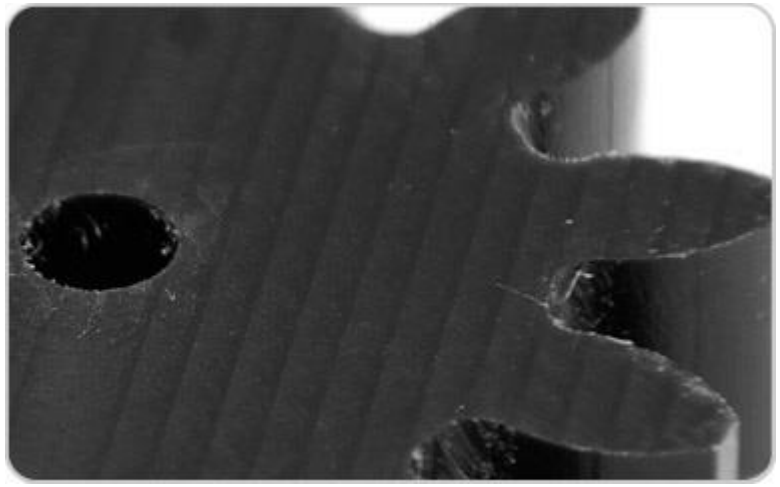
Etude du phénomène de frottement au niveau local

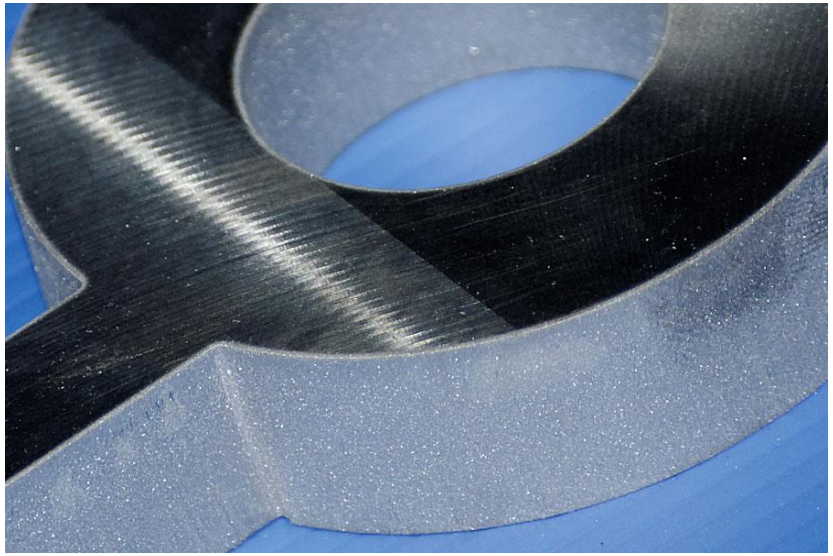


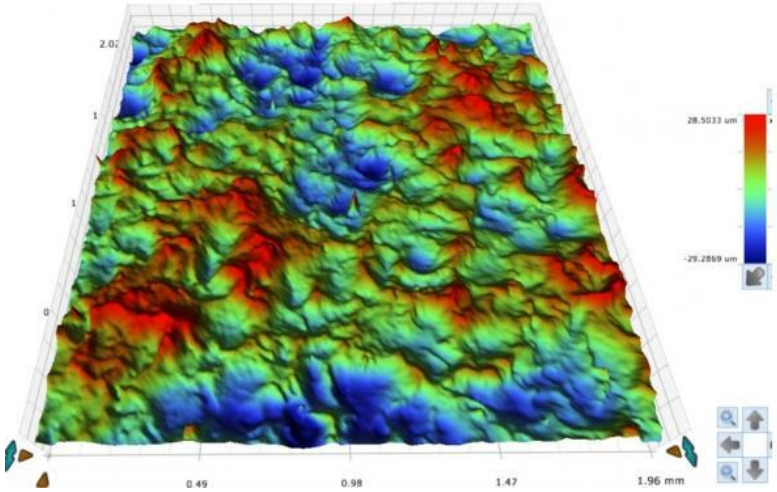
Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

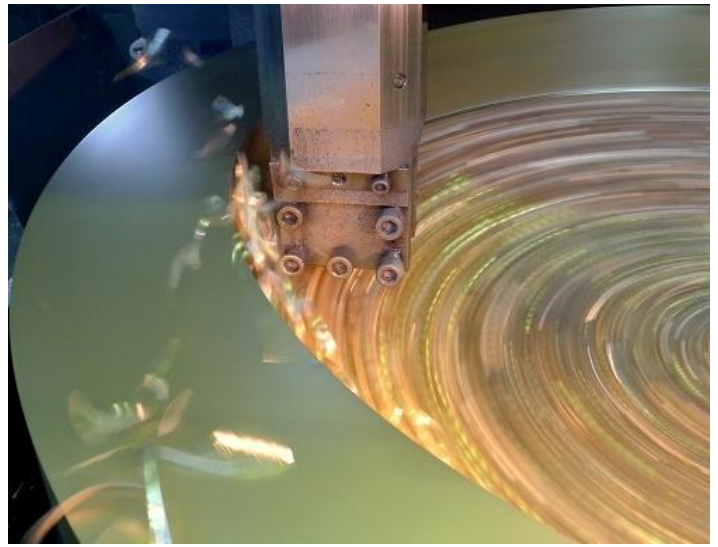
Contact surfacique ou linéique avec frottement

[Modèle local avec frottement]









Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

Contact surfacique ou linéique avec frottement

Modèle local avec frottement

$$\{dT_{1\to2}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{dF_{1\to2}}(P) = \overrightarrow{eff(P)}d\Omega \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_P$$

$\overrightarrow{eff(P)}$ = densité d'efforts en P.

- Si contact linéique, $\overrightarrow{eff(P)}$ = densité linéique d'efforts (N/m)
- Si contact surfacique, $\overrightarrow{eff(P)}$ =densité surfacique d'efforts (N/m^2)

Rappel : Contact parfait → $\overrightarrow{eff(P)} = -p(P).\vec{n}(P)$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{eff(P)} = -p(P).\vec{n}(P) + \vec{q}(P)}$$

$p(P)$ = densité normale d'efforts ou pression de contact au point P.

$\vec{q}(P)$ = densité tangentielle d'effort au point P, tangent au plan de contact.

Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

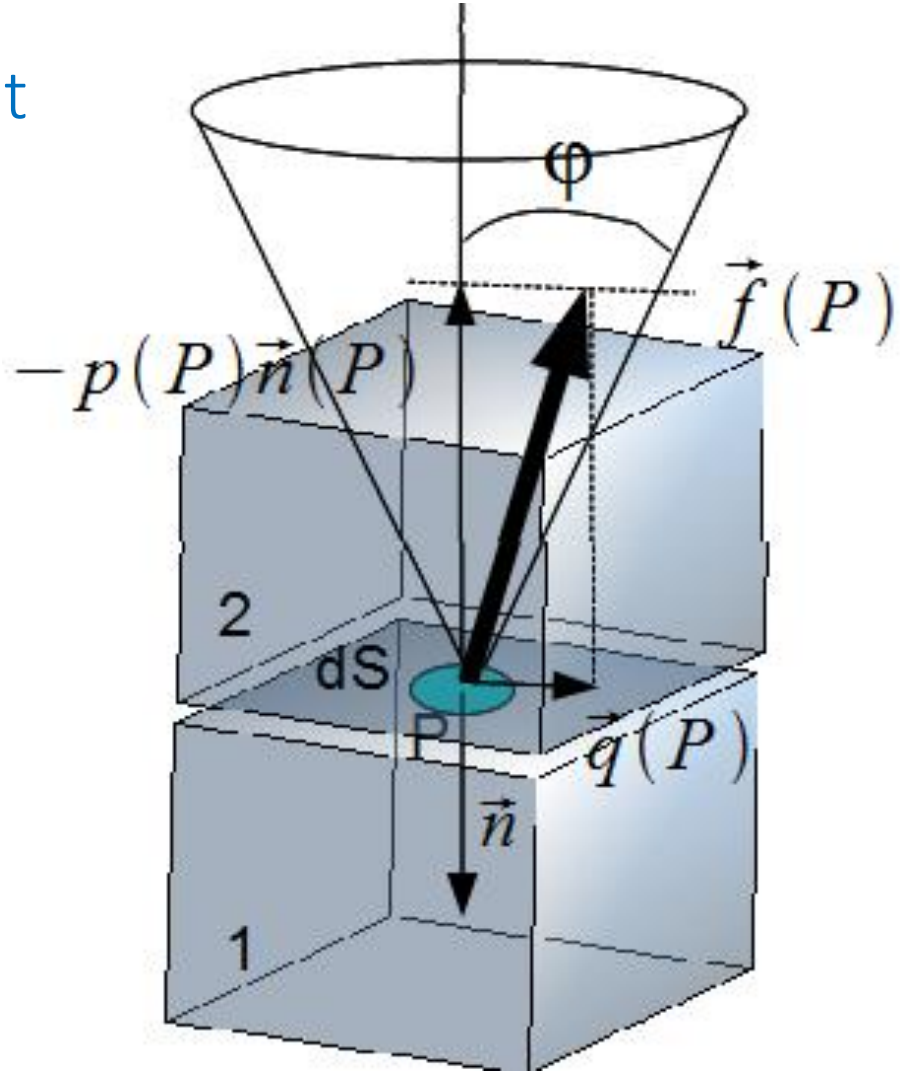
Contact surfacique ou linéique avec frottement

Lois de Coulomb locales

Lois de Coulomb locales → les mêmes (densités d'efforts)

$\vec{t}(P)$ = Vecteur unitaire directeur de la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}$:

$$\vec{t}(P) = \frac{\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}}{\left\|\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}\right\|}$$



Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

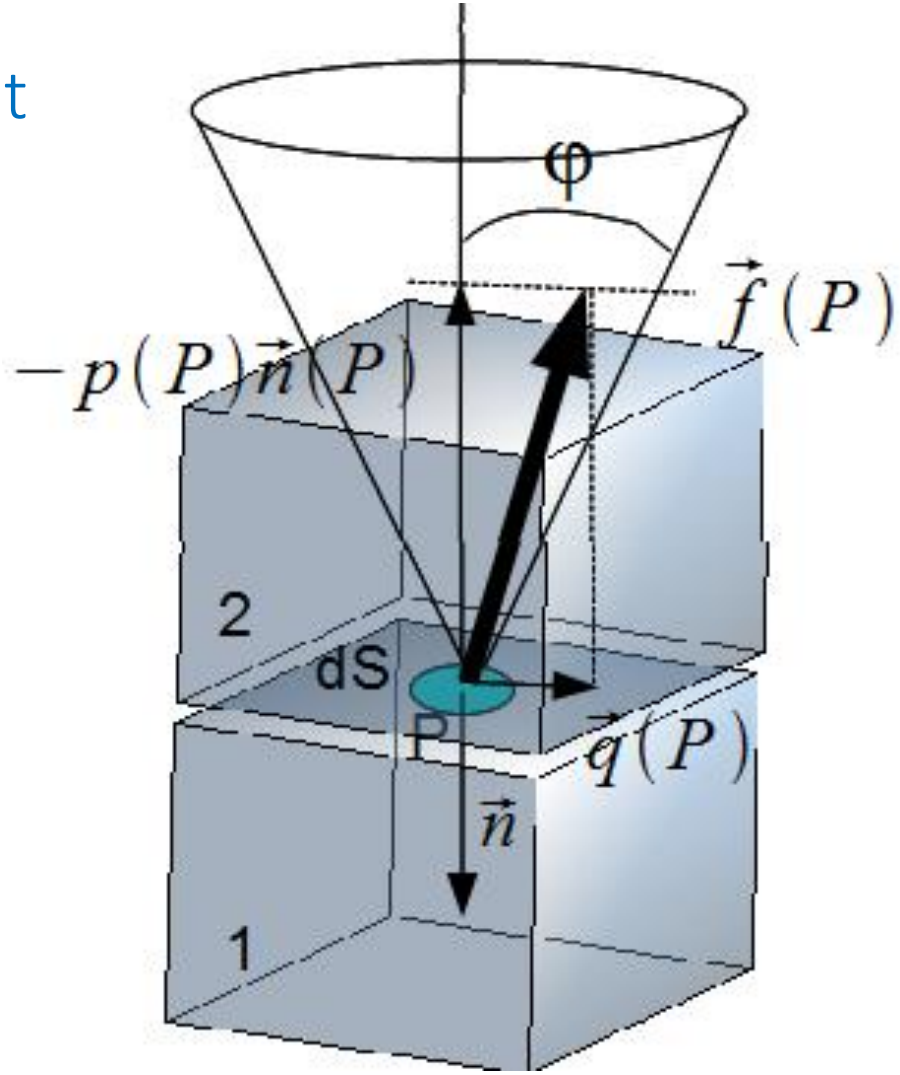
Contact surfacique ou linéique avec frottement

Lois de Coulomb locales

Cas du glissement : $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} \neq \vec{0}$

- $\vec{q}(P)$ opposé au vecteur vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}$
- $\vec{q}(P) = -q(P).\vec{t}(P)$ avec $q(P) > 0$

$\boldsymbol{q(P) = f.p(P)}$ (f coefficient de frottement)



Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

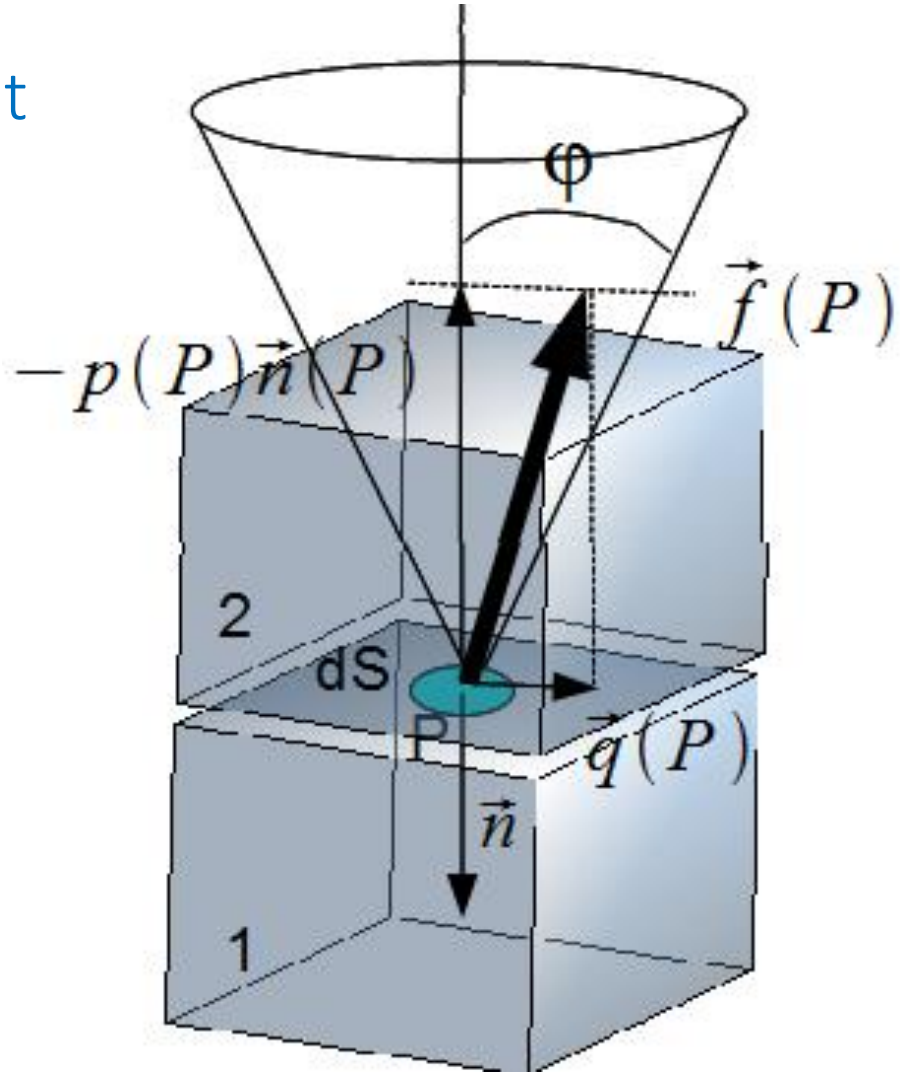
Contact surfacique ou linéique avec frottement

Lois de Coulomb locales

Cas du non glissement : $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \vec{0}$

~~Connaît~~ direction de $\vec{q}(P)$

$\boldsymbol{q(P) < f.p(P)}$ (f coefficient de frottement)



Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

Contact surfacique ou linéique avec frottement

De l'action mécanique locale à l'action mécanique globale

$$\{T_{1\to 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1\to 2}} = \int_{\Omega} [-p(P).\vec{n}(P) + \vec{q}(P)]\, d\Omega \\ \overrightarrow{M_{A,1\to 2}} = \int_{\Omega} \overrightarrow{AP} \wedge [-p(P).\vec{n}(P) + \vec{q}(P)] d\Omega \end{array} \right\}_A$$

Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

Contact surfacique ou linéique avec frottement

Frottement fluide local

Le frottement visqueux local → même théorie que le frottement visqueux global

Effort local de type amortisseur :

$$\vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{P}) = -\boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}}$$

k coefficient de l'amortissement local (N.s/m^{-3}).