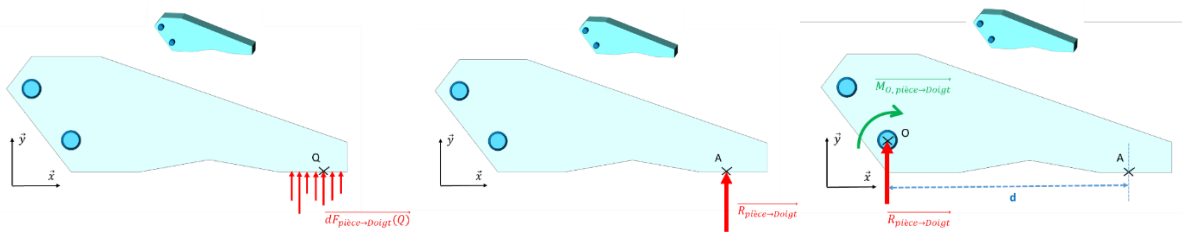


3_ Modélisation des Actions Mécaniques Globale/Locale

Compétences attendues :

- ✓ Modéliser une action mécanique.

1. Modélisation globale – locale

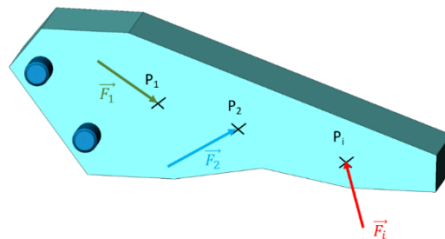


Modèle local réalisé par des champs de vecteurs

Modèle global réalisé par des champs de torseurs

1.1. Répartition des actions mécaniques

Un solide peut être caractérisé par un ensemble de points matériels P_i . Chaque point matériel P_i est soumis à une action mécanique élémentaire \vec{F}_i .



La modélisation locale des actions mécanique va faire intervenir les forces élémentaires \vec{F}_i qui agissent sur chaque point matériel P_i . L'effet local de l'action mécanique \vec{F}_i en P_i peut être modélisé par le torseur suivant :

$$\{dT_{i \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dR_{i \rightarrow S}} = \vec{F}_i \\ \overrightarrow{dM_{P_i, i \rightarrow S}} = \vec{0} \end{array} \right\}_{P_i}$$

Si on veut évaluer l'effet global de l'ensemble des actions mécaniques élémentaires \vec{F}_i , on parlera de modélisation globale. Dans cet exemple l'effet global de ces actions mécaniques \vec{F}_i peut être représenté par le torseur suivant :

$$\{T_{i \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{i \rightarrow S}} = \sum_i \overrightarrow{dR_{i \rightarrow S}} = \sum_i \vec{F}_i \\ \overrightarrow{M_{A, i \rightarrow S}} = \sum_i \overrightarrow{dM_{A, i \rightarrow S}} = \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i \end{array} \right\}_A$$

1.2. Modèle de torseur des actions mécaniques locales

Dans cette partie, le domaine Ω représente soit :

- Un volume
- Une surface
- Une ligne

Pour définir la forme du torseur des actions mécaniques locales agissant sur un élément de domaine $d\Omega$, on fait l'hypothèse que l'action mécanique élémentaire agissant sur un élément de domaine $d\Omega$ est proportionnelle à la mesure de cet élément de domaine. On définit alors le torseur des actions mécaniques locales au point M du domaine :

$$\{dT\} = \left\{ \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)} \cdot d\Omega \right\}_M$$

$\overrightarrow{eff(M)}$ est une fonction appelée **densité d'efforts** qui dépendra, dans le cas général, de la position de M.

On pourra distinguer 3 cas :

- Le domaine Ω est un volume :

$$\{dT\} = \left\{ \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)} \cdot dV \right\}_M$$

$\overrightarrow{eff(M)}$ est appelée **densité volumique** d'efforts

- Le domaine Ω est une surface :

$$\{dT\} = \left\{ \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)} \cdot dS \right\}_M$$

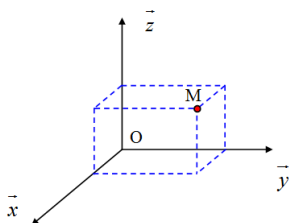
$\overrightarrow{eff(M)}$ est appelée **densité surfacique** d'efforts

- Le domaine Ω est une ligne :

$$\{dT\} = \left\{ \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)} \cdot dL \right\}_M$$

$\overrightarrow{eff(M)}$ est appelée **densité linéique** d'efforts

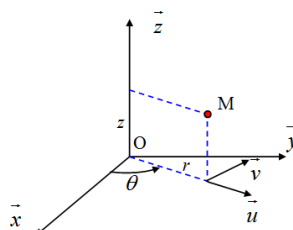
Coordonnées cartésiennes



$$dS = dx \cdot dy$$

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

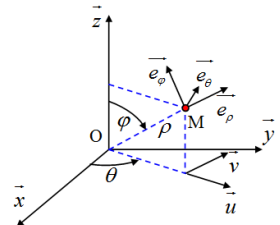
Coordonnées cylindriques



$$dS = r \cdot d\theta \cdot dz$$

$$dV = r \cdot d\theta \cdot dz \cdot dr$$

Coordonnées sphériques



$$dS = r^2 \cdot \sin\phi \cdot d\phi \cdot d\theta$$

$$dV = r^2 \cdot \sin\phi \cdot d\phi \cdot d\theta \cdot dr$$

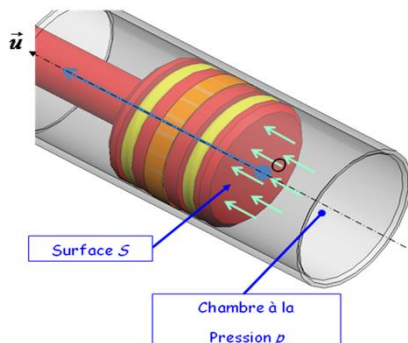
Élément d'intégration en fonction du système de coordonnées

1.3. Modèle de torseur d'actions mécaniques globales

Une fois défini le torseur des actions mécaniques locales, il est possible de calculer le torseur des actions mécaniques global en un point A, en faisant l'intégrale de l'ensemble des actions mécaniques locales en tout point du solide.

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \int_{\Omega} \overline{dF(M)} = \int_{\Omega} \overline{eff(M)} d\Omega \\ \vec{M}_A = \int_{\Omega} \overline{AM} \wedge \overline{eff(M)}. d\Omega \end{array} \right\}_A$$

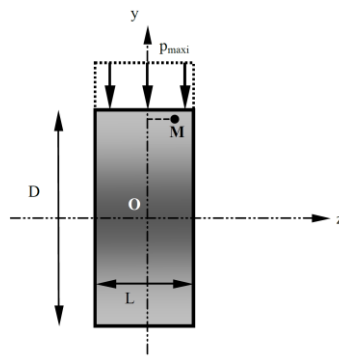
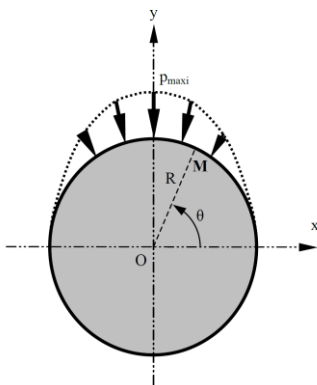
Exemple : Force de pression dans un piston :



$$\vec{F} = \int_{M \in S} \overline{dF(M)} = \int_{M \in S} p. \overline{dS(M)} = p. \int_{M \in S} \overline{dS(M)}$$

$$\vec{F} = -p. \int_{M \in S} dS. \vec{n} = -p. S. \vec{n}$$

Exemple : Couple sur un coussinet :



La répartition de la pression est supposée suivre la loi $p(\theta) = p_M \cdot \sin(\theta)$

Calcul du moment en O :

$$\vec{M}_O = \int_S \overline{OM} \wedge \overline{eff(M)}. dS = \int_S \overline{OM} \wedge -p(\theta). dS. \vec{n}$$

Avec

- $\vec{n} = \vec{e}_r$
- $dS = r. d\theta. dz$
- $0 \leq \theta \leq \pi$
- $0 \leq z \leq L$
- $\overline{OM} = r. \vec{e}_r + z. \vec{z}$

$$\vec{M}_O = \int_0^\pi \int_0^L (r \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{z}) \wedge -p_M \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{e}_r = - \int_0^\pi \int_0^L p_M \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot z \cdot dz \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\vec{M}_O = - \int_0^\pi \int_0^L p_M \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot z \cdot dz \cdot (\sin(\theta) \cdot \vec{x} + \cos(\theta) \cdot \vec{y})$$

$$\vec{M}_O = - \int_0^\pi \int_0^L p_M \cdot \sin^2(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot z \cdot dz \cdot \vec{x} - \int_0^\pi \int_0^L p_M \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot z \cdot dz \cdot \vec{y}$$

$$\vec{M}_O = -p_M \cdot r \cdot \vec{x} \int_0^\pi \int_0^L \sin^2(\theta) \cdot d\theta \cdot z \cdot dz - p_M \cdot r \cdot \vec{y} \int_0^\pi \int_0^L \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot z \cdot dz$$

On a $\int \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = \left[\frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]$ et $\int \sin^2(\theta) = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]$

$$\vec{M}_O = -p_M \cdot r \cdot \vec{x} \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^L \cdot \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^\pi - p_M \cdot r \cdot \vec{y} \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^L \cdot \left[\frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_0^\pi$$

$$\vec{M}_O = - \frac{p_M \cdot r \cdot \pi \cdot L^2}{4} \cdot \vec{x}$$

1.4. Centre de poussée d'une répartition de forces

Considérons une répartition d'effort de densité $\overrightarrow{eff}(M)$ qui s'exerce sur le domaine Ω . Le torseur d'action mécanique résultant est le suivant :

$$\{T_{f \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{f \rightarrow S} = \int_{\Omega} \overrightarrow{eff}(M) d\Omega \\ \overrightarrow{M}_{O, f \rightarrow S} = \int_{\Omega} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{eff}(M) \cdot d\Omega \end{array} \right\}_O$$

$d\Omega$ est un élément du domaine Ω et M est un point courant du domaine $d\Omega$.

Définition : Le centre de poussée des actions mécaniques agissant sur le domaine Ω et résultant de la densité d'effort $\overrightarrow{eff}(M)$ est le point P tel que :

$$\{T_{f \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{f \rightarrow S} = \int_{\Omega} \overrightarrow{eff}(M) d\Omega \\ \overrightarrow{M}_{P, f \rightarrow S} = \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

Remarque : Le torseur modélisant les actions mécaniques globales à un moment nul au point P.

Remarque : Le centre de poussée des actions mécaniques de pesanteur est le centre de gravité du solide.

Pour trouver la position du point P, il suffit d'exprimer la condition de nullité du moment au point P :

$$\overrightarrow{M_{P,f \rightarrow S}} = \int_{\Omega} \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega = \vec{0}$$

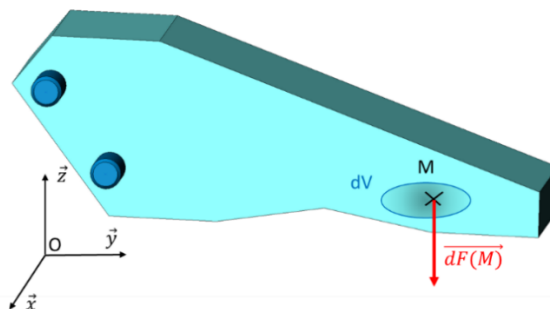
En pratique on recherche souvent la position de ce point par rapport à l'origine du repère.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega &= \vec{0} \\ \int_{\Omega} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega &= \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega \\ \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R_{f \rightarrow S}} &= \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega \end{aligned}$$

Cette dernière relation sera privilégiée pour trouver la position du centre de poussée.

2. Modélisation des actions mécaniques à distance

2.1. Modélisation des actions mécaniques de pesanteur



La pesanteur agit en tout point d'un solide et résulte du phénomène d'attraction terrestre.

Soit $\overrightarrow{eff(M)}$ la répartition volumique d'effort résultant de la pesanteur et existant en tout point M d'un solide. Chaque élément de volume élémentaire dV est soumis à une action mécanique $\overrightarrow{dF(M)}$.

Pour un corps homogène la pesanteur induit la répartition volumique d'effort suivante :

$$\overrightarrow{eff(M)} = -\rho \cdot g \cdot \vec{z} \text{ avec } \vec{z} \text{ vertical ascendant.}$$

g : accélération de la pesanteur en m/s^2

ρ : masse volumique du corps en kg/m^3

Le torseur des actions mécaniques locales, agissant sur l'élément de volume dV , dû à la pesanteur peut s'écrire en tout point M :

$$\{dT_{pes \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dR_{pes \rightarrow S}} = -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

Le torseur global résultant de la somme de toutes les actions mécaniques de pesanteur, agissant sur S, peut s'écrire en un point O :

$$\{T_{pes \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pes \rightarrow S}} = \int_{M \in S} -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{O,pes \rightarrow S}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_O$$

Remarque : On peut définir une masse surfacique ou linéique si certaines dimensions du solide sont négligeables. On a alors des intégrales de surface ou de longueur et ρ représente alors une masse surfacique ou linéique.

Si G est le centre de gravité du solide S le torseur prend la forme suivante :

$$\{T_{pes \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pes \rightarrow S}} = \int_{M \in S} -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{G,pes \rightarrow S}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} = \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pes \rightarrow S}} = \vec{P} \\ \overrightarrow{M_{G,pes \rightarrow S}} = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

\vec{P} représente alors le poids du solide S.

Remarque : L'action de \vec{g} est souvent négligée dans beaucoup de problèmes. Prenons l'exemple d'une pince de robot dont le mors pèse 2,2 kg, donc la pesanteur est un glisseur de 21,56 N. L'action à imposer sur la pièce à serrer est 1000 N. On voit bien que l'action de \vec{g} est négligeable devant celle du fluide.

2.1.1. Définition du centre de gravité d'un solide

Le centre de gravité G du solide S est défini tel que : $\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot \rho \cdot dV = \vec{0}$

Il est souvent intéressant de faire apparaître l'origine du repère pour calculer directement les coordonnées de G.

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \int_{M \in S} (\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0M}) \cdot dm = \vec{0} \rightarrow \int_{M \in S} \overrightarrow{0G} \cdot dm = \int_{M \in S} \overrightarrow{0M} \cdot dm \rightarrow m \cdot \overrightarrow{0G} = \int_{M \in S} \overrightarrow{0M} \cdot dm$$

Nous obtenons donc : $\overrightarrow{0G} = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} \overrightarrow{0M} \cdot dm$

Il est ensuite très facile d'obtenir les coordonnées de G dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$x_G = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} x \cdot dm \quad y_G = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} y \cdot dm \quad z_G = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} z \cdot dm$$

C'est cette relation que l'on utilisera en pratique pour trouver la position du centre de gravité.

Remarque : Pour un solide S que l'on peut diviser en un ensemble de masses discrètes m_i de centres de gravité G_i , on peut écrire :

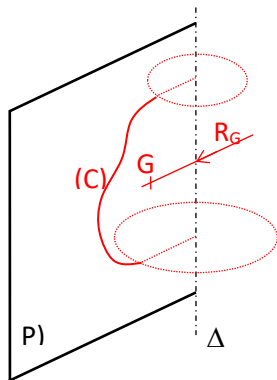
$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \cdot \sum_i m_i \vec{OG}_i$$

2.1.2. Théorèmes de Guldin

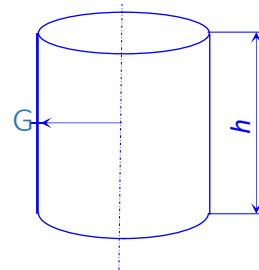
Premier théorème de Guldin :

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane C tournant autour d'un axe Δ de son plan P, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur L de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

Application : Calcul de la surface d'un cylindre de révolution



$$S = 2 \cdot \pi \cdot R_G \cdot L$$

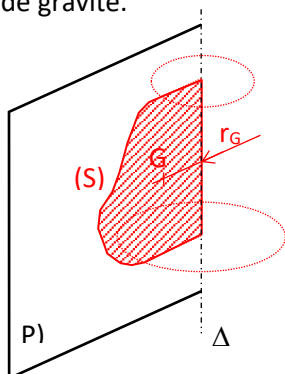


$$S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

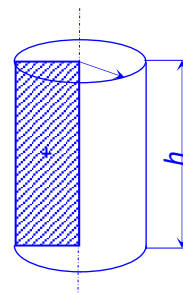
Deuxième théorème de Guldin :

Le volume engendré par une surface S plane tournant autour d'un axe Δ de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

Application : Calcul du volume d'un cylindre



$$V = 2 \cdot \pi \cdot r_G \cdot S$$



$$V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R}{2} \cdot R \cdot h$$

Ces 2 théorèmes permettent de trouver des surfaces, des volumes ou la position de centres de gravité sans passer par une intégration.

3. Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

3.1. Modèle du contact parfait

Hypothèses

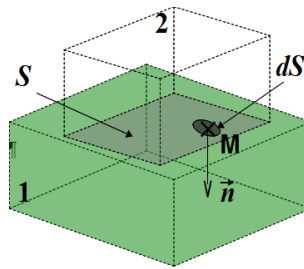
- Les pièces mécaniques sont des solides indéformables.
- Les surfaces sont géométriquement parfaites.
- Les jeux sont nuls.
- **Le contact est sans frottement, ni adhérence.**

Conséquence : La puissance des efforts de liaison peut être écrite par le biais d'un comoment de torseur : $P_{i \rightarrow j} = \{T_{M,i \rightarrow j}\} \otimes \{V_{M,i/j}\} = \overrightarrow{R_{i \rightarrow j}} \cdot \overrightarrow{V_{M \in i/j}} + \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \cdot \overrightarrow{M_{M,i \rightarrow j}} = 0$

Si une liaison n'est pas parfaite (frottements), c'est le torseur d'inter-efforts qui est modifié, le torseur cinématique reste le même. La puissance dissipée dans la liaison est alors négative.

En admettant ces hypothèses, les efforts transmis entre deux solides sont perpendiculaires au plan tangent commun aux deux solides.

Soient deux solides S_1 et S_2 en contact selon une surface S .



- On isole S_2 .
- On note $\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(M)$ l'action mécanique élémentaire exercée par S_1 sur S_2 au point M.
- $\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(M)$ est dirigée vers l'intérieur du solide isolé.

La force $\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(M)$ se modélise dans le cas général de la manière suivante :

$$\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(M) = -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M)$$

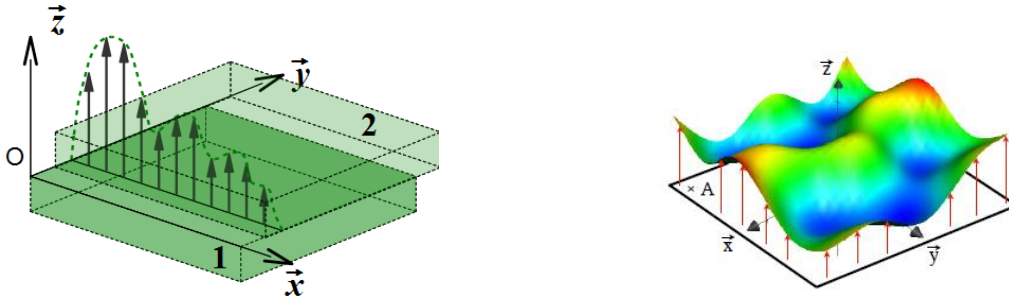
- $p(M)$ = pression de contact au point M ($\text{Pa} = \text{N/m}^2$)
- $\vec{n}(M)$ = vecteur unitaire normal au plan tangent commun en M, orienté vers l'extérieur du solide isolé.

Le torseur global des actions mécaniques exercé par le solide S_1 sur le solide S_2 exprimé en un point O quelconque s'obtient en sommant tous les torseurs élémentaires :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} = \int_{M \in S} -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) \\ \overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) \end{array} \right\}_O$$

3.2. Actions mécaniques dans une liaison parfaite

Considérons une liaison appui-plan de normale \vec{z} avec $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère local.



Le torseur des actions mécaniques exercées par 1 sur 2 s'écrit dans le cas général sous la forme :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

L'objectif est de simplifier la forme de ce torseur compte tenu de la nature du contact de la liaison.

Deux méthodes permettent d'obtenir une expression simplifiée des torseurs (la seconde sera à privilégier...).

3.2.1. Détermination de la forme du torseur : passage local-global

Dans le cas d'une liaison appui-plan, la surface de contact entre les deux solides est un plan. La densité d'effort élémentaire est portée par la normale extérieure au plan de contact et seule son intensité est inconnue.

$$d\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}(M) = -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M)$$

$$\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} = \int_{M \in S} -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) = \int_{M \in S} -p(M) \cdot dS \cdot \vec{z} = Z_{12} \cdot \vec{z} \quad \text{avec } \vec{n}(M) = \vec{z} \text{ pour tout point } M.$$

De la même manière, en écrivant le moment au point O, on a :

$$\overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) = \int_{M \in S} (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y}) \wedge -p(M) \cdot dS \cdot \vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} = \int_{M \in S} (x \cdot p(M) \cdot dS \cdot \vec{y} - y \cdot p(M) \cdot dS \cdot \vec{x}) = M_{12} \cdot \vec{y} + L_{12} \cdot \vec{x}$$

Ainsi le torseur de la liaison appui-plan parfaite se réduit à :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{array} \right\}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

3.2.2. Détermination de la forme du torseur : complémentarité cinématique-statique

Le torseur des actions mécaniques transmissibles du solide 2 sur le solide 1 peut directement se déduire du torseur cinématique du solide 2 par rapport au solide 1.

3.3. Action hydrostatique d'un fluide sur un solide

Nous cherchons ici à modéliser l'action mécanique exercée par un fluide sur une paroi solide.

Les forces de pression exercent une action mécanique perpendiculairement à la surface du solide sur laquelle elles agissent.

Soit un point M d'un fluide se trouvant à l'altitude z.

La pression au point M varie selon la loi : $p(z) = \rho \cdot g \cdot z + cste$

La constante est calculée par la connaissance de la pression en au moins un point de l'espace.

Remarque : Cette constante dépend du paramétrage retenu pour chaque exercice.

Exemple :

ρ : masse volumique du fluide

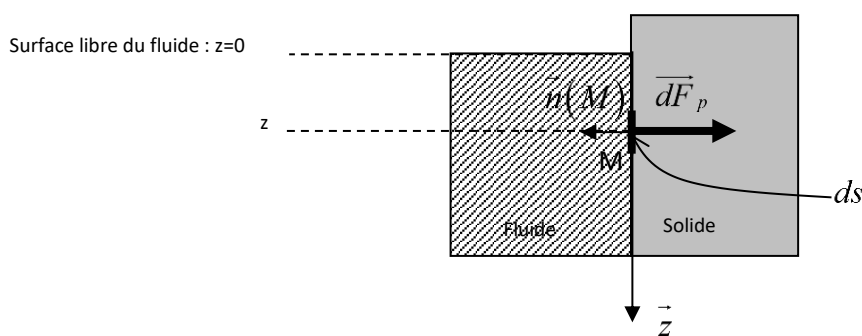
g : accélération de la pesanteur

z : altitude du point M (axe \vec{z} vertical descendant)

L'effort élémentaire $\overrightarrow{dF_p}$ qui agit sur un élément de surface dS est donné par :

$$\overrightarrow{dF_p} = -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M)$$

$\vec{n}(M)$: vecteur normal en M dirigé vers l'extérieur du solide isolé



On peut alors définir la forme générale du torseur des actions mécaniques exercées par le fluide sur une paroi :

$$\{T_{Fluide \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{Fluide \rightarrow S}} = \int_{M \in S} -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) \\ \overrightarrow{M_{O,Fluide \rightarrow S}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) \end{array} \right\}_O$$

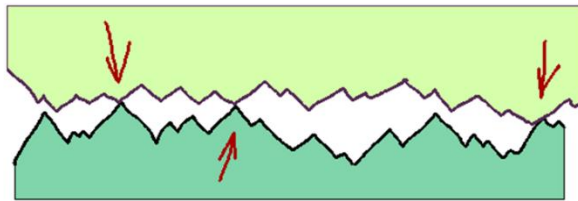
4. Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

4.1. Contact surfacique ou linéique avec frottement

Les lois de Coulomb, concernant le frottement de glissement, ne sont valables que pour un contact ponctuel ou « quasi ponctuel ». Mais très souvent le contact entre deux solides n'est pas ponctuel et s'effectue sur une surface entière. Il suffit alors de considérer de petites zones « quasi ponctuelles » autour de chaque point de la zone de contact et d'écrire les lois de Coulomb sur les densités surfaciques d'actions mécaniques.

4.2. Modèle local avec frottement

Dans la pratique, nous savons que le contact ne s'effectue jamais sur des belles surfaces bien propres et parfaites mais plutôt comme sur la figure ci-dessous. D'où la nécessité d'étudier ce phénomène au niveau local.



On considère un domaine de contact Ω (surface S ou ligne de longueur L) et un élément de domaine $d\Omega$ autour d'un point P de normale $\vec{n}(P)$ (normale extérieure à 2 dirigée de 2 vers 1).

Le tenseur élémentaire d'action mécanique de 1 sur 2 est donné en P par :

$$\{dT_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(P) = \overrightarrow{eff}(P)d\Omega \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

où $\overrightarrow{eff}(P)$ est la densité d'efforts en P .

- Si le contact est linéique, $\overrightarrow{eff}(P)$ est une densité linéique d'efforts exprimé en N/m
- Si le contact est surfacique, $\overrightarrow{eff}(P)$ est une densité surfacique d'efforts exprimé en N/m².

Rappel : Dans le cas du modèle de contact parfait, on a supposé que la densité d'efforts est dirigée selon la normale au contact. $\overrightarrow{eff}(P) = -p(P) \cdot \vec{n}(P)$.

Pour prendre en compte le frottement au niveau de cet élément de domaine, on pose :

$$\overrightarrow{eff}(P) = -p(P) \cdot \vec{n}(P) + \vec{q}(P)$$

$p(P)$: densité normale d'efforts ou pression de contact au point P .

$\vec{q}(P)$: densité tangentielle d'effort au point P , tangent au plan de contact.

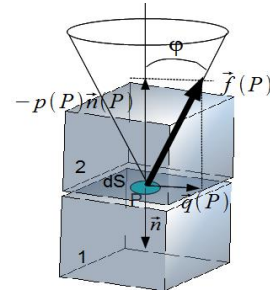
4.3. Lois de Coulomb locales

Les lois de Coulomb locales sont les mêmes que celles obtenues pour le contact ponctuel mais portent sur les densités de forces.

On note $\vec{t}(P)$ le vecteur unitaire directeur de la vitesse de glissement $\vec{V}_{P \in 2/1} : \vec{t}(P) = \frac{\vec{V}_{P \in 2/1}}{\|\vec{V}_{P \in 2/1}\|}$

Cas du glissement : $\vec{V}_{P \in 2/1} \neq \vec{0}$

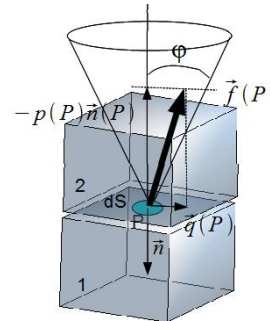
- $\vec{q}(P)$ est opposé au vecteur vitesse de glissement $\vec{V}_{P \in 2/1}$
- $\vec{q}(P) = -q(P) \cdot \vec{t}(P)$ avec $q(P) > 0$
- $q(P) = f \cdot p(P)$ (f coefficient de frottement)



Cas du non glissement : $\vec{V}_{P \in 2/1} = \vec{0}$

On ne connaît pas la direction de $\vec{q}(P)$

$q(P) < f \cdot p(P)$ (f coefficient de frottement)



4.4. De l'action mécanique locale à l'action mécanique globale

La détermination du torseur d'action mécanique global nécessite l'écriture du torseur local en un point fixé et une intégration sur le domaine.

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\Omega} [-p(P) \cdot \vec{n}(P) + \vec{q}(P)] d\Omega \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_{\Omega} \vec{AP} \wedge [-p(P) \cdot \vec{n}(P) + \vec{q}(P)] d\Omega \end{array} \right\}_A$$

Comme pour le contact ponctuel, on se placera très souvent à la limite de glissement pour connaître ainsi la densité tangentielle d'efforts $q(P)$. Il sera cependant nécessaire de connaître également la loi de répartition de la pression $p(P)$, qui sera dans les cas les plus courants constante.

4.5. Frottement visqueux local

Le frottement visqueux local s'appuie sur la même théorie que le frottement visqueux vu dans le chapitre précédent. Localement, il sera très souvent représenté par l'effort local de type amortisseur avec $\vec{p}(P) = -k \cdot \vec{v}$ avec k coefficient de l'amortissement local ($N \cdot s/m^3$).