1_ Modélisation des Actions Mécaniques

Compétences attendues :

- ✓ Modéliser une action mécanique.

Problématique : *Pour concevoir un système industriel, il est nécessaire de le dimensionner. Cela signifie d'une part pour toutes les pièces, le choix des dimensions et le choix du matériau et d'autre part, le choix des actionneurs. Ce dimensionnement aura des conséquences directes sur la résistance du système dans les cas les plus défavorables et sur la durée de vie du système.*

Pour cela, il est nécessaire de connaître au mieux les actions mécaniques auxquelles seront soumises les différentes pièces du système.

1. Introduction

Tout mécanisme est actionné par une **action mécanique** : il transmet ou transforme l'action mécanique qui le met en **mouvement** (ou, au contraire, l'en empêche).

Il paraît donc important d'étudier ces actions mécaniques pour dimensionner un mécanisme : une fois la solution technique choisie grâce à l'analyse fonctionnelle, il faut mener des études pour déterminer les grandeurs optimales de chaque composant afin de répondre au cahier des charges fixé.

Tout mécanisme est dimensionné pour pouvoir être utilisé durant un temps donné. Or, la durée de vie d'une pièce dépend généralement :

- De l'environnement dans lequel elle se trouve
- De ses dimensions
- Du matériau utilisé
- Mais aussi des actions appliquées sur celle-ci
- …

Ces actions peuvent être mesurées mais cela demande :

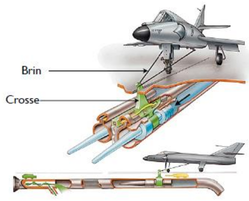
- La construction d'un prototype
- La mise en place d'un laboratoire de mesure
- Des moyens financiers importants
- …

Nous allons essayer de PREVOIR les actions mécaniques exercées sur un mécanisme en utilisant des modèles mathématiques et des lois physiques.

1.1. Définition

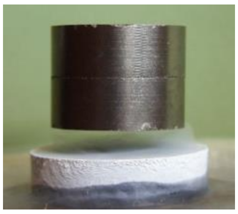
Une action mécanique (AM) est un phénomène susceptible de :

- provoquer et/ou modifier le mouvement d'un solide (modèle global),
- maintenir un solide au repos (modèle global),
- déformer un solide (modèle local).




1.2. Classification des actions mécaniques

Les actions mécaniques sont généralement classées selon la nature géométrique du domaine sur lequel elles s'appliquent. On distingue ainsi :

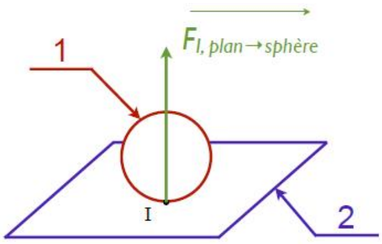

Action à distance contact surfacique


Action de contact ponctuel


Action de contact surfacique

1.3. Représentation graphique des actions mécaniques

Pour représenter graphiquement l'action mécanique d'un solide 2 sur un solide 1, on a envie de dessiner une flèche orientée dans le sens dans lequel on imagine (grâce à notre vécu de ce type de phénomènes physiques) que cette action s'exerce. Dans le cas des actions mécaniques de contact ponctuel, on "sent" facilement que celle-ci s'applique en un point particulier : le point I de contact entre les solides.



Ainsi, une action mécanique est représentée graphiquement par une flèche dont l'origine est placée en un point. La longueur de la flèche, en correspondance avec une échelle donnée, indique l'intensité de l'action mécanique

2. Modélisation des actions mécaniques

L'outil mathématique le plus proche de la représentation graphique intuitée dans le paragraphe précédent est le vecteur lié : un vecteur lié à un point d'application. Ses caractéristiques sont donc :

- la direction,
- le sens,
- la norme,
- le point d'application.

Il semble alors tout naturel d'utiliser cet outil pour modéliser une action mécanique.

2.1. Le vecteur force, premier modèle

L'action mécanique exercée en un point I par un solide 2 sur un solide 1 est modélisée par un vecteur lié nommé vecteur-force, généralement noté $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow 1}}$ et caractérisée par :

- son point d'application,
- sa direction,
- son sens,
- son intensité, dont l'unité est le Newton (N).

Dans le langage courant, les termes vecteur-force, force et effort sont confondus et désignent la même chose.

Exemple d'action mécanique	Valeur (N)
Force exercée par une masse d'1 kg	10
Force exercée par un être humain de 65 kg	650
Force maximale exercée par un marteau	2000
Force maximale exercée par les quadriceps	3000
Force maximale créée par 1cm² d'un bon adhésif	10000
Force nécessaire pour casser une bonne corde d'escalade	30000

Dans la pratique, l'utilisation du seul vecteur-force est néanmoins limitée. En effet, on préfère généralement connaître les effets de cette force en d'autres points du solide que le seul point d'application de l'action mécanique.
Par exemple, on sait qu'une lampe murale est soumise à l'action de la pesanteur. On la représente habituellement par :

Pour l'ingénieur, il est nécessaire de savoir quels sont les efforts engendrés par le poids au point de fixation de la lampe, pour savoir comment il devra fixer celle-ci dans le mur. On utilise donc deux notions qui permettent de connaître les effets d'une force appliquée en un point et/ou en n'importe quel point d'observation : la résultante et le moment.

2.2. La résultante et le moment, second modèle

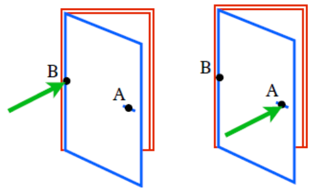
2.2.1. La résultante

La résultante induite par la force $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow1}}$ appliquée en un point I par un solide 2 sur un solide 1 est un vecteur, noté $\overrightarrow{R_{2\rightarrow1}}$ qui possède :

- même direction,
- même sens,
- même intensité (en Newton) que le vecteur-force $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow1}}$.

La résultante est donc **indépendante du point d'application** de l'effort.

Remarque : Pourquoi les poignées de portes sont-elles places à l'opposé des gonds ?



Si l'effort s'applique en B, au niveau des gonds de la porte, alors celle-ci ne se ferme pas. Par contre, si on applique un effort de même direction, sens et intensité en A, alors la porte se ferme. Il y a donc un phénomène qui a permis de mettre la porte en rotation autour de l'axe définit par ses gonds. La résultante est identique dans les deux cas et ne suffit donc pas à décrire ce phénomène. On définit alors le moment, qui prend en compte l'influence du point d'application de l'effort.

2.2.2. Le moment

Le moment d'une force $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow1}}$ appliquée en un point I par un solide 2 sur un solide 1, calculé en un point J est le vecteur lié $\overrightarrow{M_{J,2\rightarrow1}}$ tel que : $\overrightarrow{M_{J,2\rightarrow1}} = \overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{F_{I,2\rightarrow1}}$

L'unité de son intensité est le Newton-mètres (N.m).

Remarques :

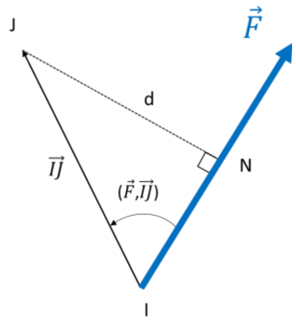
- Le moment d'une force $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow1}}$ appliquée en un point *I* par un solide 2 sur un solide 1, calculé au point d'application *I* de cette force est donc nul : $\overrightarrow{M_{I,2\rightarrow1}} = \vec{0}$.
- Si le point *J* est tel que $\overrightarrow{F_{I,\ 2\rightarrow1}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{JI}$, alors le moment est nul : $\overrightarrow{M_{J,2\rightarrow1}} = \vec{0}$

Ordre de grandeur :

L'intensité du moment permettant le serrage d'un boulon de roue de voiture à l'aide d'une clé dynamométrique est de 5 à 15 daN.m, c'est-à-dire 50 à 150 N.m.

Interprétation physique : Le moment représente l'aptitude d'une force à faire tourner un solide autour d'un axe donné.

<u>Le bras de levier</u> :



Le moment en J d'une force $\overrightarrow{F_{I,2\rightarrow 1}}$ (abrégée $\vec{F}$ par la suite), s'écrit :

$$\overrightarrow{M_{J,2\rightarrow 1}} = \overrightarrow{JI} \wedge \vec{F}$$

Soit N le projeté orthogonal de J sur le support de $\vec{F}$. On a alors :

$$\overrightarrow{M_{J,2\rightarrow 1}} = (\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{NI}) \wedge \vec{F}$$

Or $\overrightarrow{NI}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires. On en déduit que :

$$\overrightarrow{M_{J,2\rightarrow 1}} = \overrightarrow{JN} \wedge \vec{F}$$

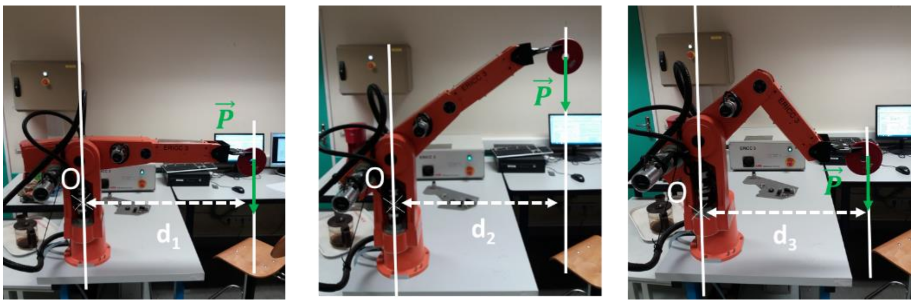
Par définition du produit vectoriel :

$\left\|\overrightarrow{M_{J,2\rightarrow 1}}\right\| = \left\|\overrightarrow{JN}\right\|\left\|\vec{F}\right\| \sin(\overrightarrow{JN},\vec{F}) = \left\|\overrightarrow{JN}\right\|\left\|\vec{F}\right\|$ car $\overrightarrow{JN}$ et $\vec{F}$ sont orthogonaux

On pose : $\left\|\overrightarrow{JN}\right\| = d$; $\left\|\vec{F}\right\| = F$; $\left\|\overrightarrow{M_{J,2\rightarrow 1}}\right\| = M_J$, on peut alors écrire : $M_J = Fd$ avec M_J l'intensité du moment en J de la force $\vec{F}$ s'exerçant au point I et d la plus courte distance entre J et le support de $\vec{F}$. C'est cette distance *d* que l'on nomme bras de levier

<u>Conséquence</u> : Plus *d* est grand, plus M_J est grand, c'est-à-dire plus la rotation du solide autour de l'axe (*J*, $\vec{z}$) est facile à mettre en œuvre.

<u>Exemple :</u> Détermination du moment de la pesanteur pour le robot ERICC3

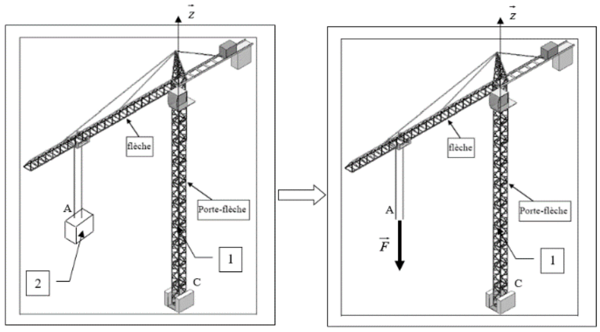


Plus le bras de levier est important, plus la pesanteur exerce un couple important par rapport au point de calcul du moment. Il est à noter que le bras de levier correspond bien la plus courte distance entre le poids et le point de calcul du moment. La forme du bras du robot n'est pas prise en compte dans ce calcul, seule la distance (projeté orthogonal) entre l'axe du moment et la direction de l'effort est prise en compte.

2.2.3. Torseur d'une action mécanique : un outil pour regrouper résultante et moment

Prenons l'exemple suivant d'une grue de chantier qui soulève une charge M.

Nous voulons trouver un modèle de représentation pour l'action mécanique exercée par la charge M sur la grue. L'effet de cette action mécanique qui s'exerce au point A peut être représentée par un vecteur dont les caractéristiques sont les suivantes :



- Point d'application : point A
- Direction : verticale
- Sens : vers le bas
- Intensité : F = Mg

Ce vecteur est la force exercée par le solide 2 sur le solide 1 et sera noté : $\overrightarrow{R_{2\to1}} = \vec{F} = -M.g.\vec{z}\ (N)$

Quel est l'effet de cette action mécanique au point C ?

En plus de l'effet de $\overrightarrow{R_{2\to1}} = -M.g.\vec{z}$ qui sera également supportée en C, on comprend que cette action mécanique entrainera au point C un effet de rotation qui aurait tendance à faire basculer la grue. Cet effet sera d'autant plus grand que la distance entre le point C et le point A sera importante.

Cet effet peut également être représenté par un vecteur.

Ce vecteur est le moment au point C de la force $\vec{F}$ et sera notée : $\overrightarrow{M_{C,2\to1}} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F}\ (N.m)$

On peut également modéliser l'effet de cette action mécanique au point B en calculant le moment au point B de la force $\vec{F}$: $\overrightarrow{M_{B,2\to1}} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$.

On peut alors écrire : $\overrightarrow{M_{B,2\to1}} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \wedge \vec{F}$

D'où $\boldsymbol{\overrightarrow{M_{B,2\to1}} = \overrightarrow{M_{C,2\to1}} + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{F}}$

On remarque que cette expression vérifie la relation de changement de point du moment d'un torseur.

<u>Conclusion :</u>

Toute action mécanique peut être entièrement caractérisée d'un point de vue mécanique par un torseur.

$$\{T_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{C,2\to1}} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} R_x & M_{cx} \\ R_y & M_{cy} \\ R_z & M_{cz} \end{Bmatrix}_{C,R}$$

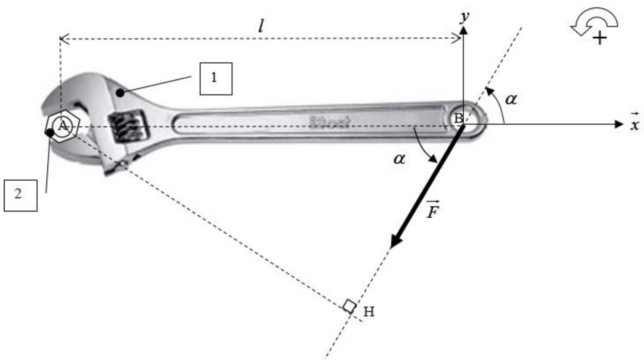
$\overrightarrow{R_{2\to1}}$: Résultante du torseur des actions mécaniques du solide 2 sur le solide 1

$\overrightarrow{M_{C,2\to1}}$: Moment au point C du torseur des actions mécaniques du solide 2 sur le solide 1.

Relation de changement de point (BABAR) : $\boldsymbol{\overrightarrow{M_{B,2\to1}} = \overrightarrow{M_{A,2\to1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{2\to1}}}$

Exemple de calcul du torseur d'une action mécanique

Considérons une personne exerçant une action mécanique $\vec{F}$ sur une clé à molette au point B afin de serrer un écrou.



Nous souhaitons calculer le moment au point A de cette action mécanique.

Par les torseurs

$$\{T_{main\to 1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{main\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{B,main\to 1}} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{main\to 1}} = \vec{F} \\ \overrightarrow{M_{A,main\to 1}} = \overrightarrow{M_{B,main\to 1}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{main\to 1}} \end{Bmatrix}_A$$

$$\overrightarrow{M_{A,main\to 1}} = \vec{0} + l.\vec{x} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F.\cos\alpha \\ -F.\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l.F.\sin\alpha \end{pmatrix} = -l.F.\sin\alpha\,.\vec{z}$$

Par la méthode du bras de levier

H est le projeté orthogonal de A sur le support de la force $\vec{F}$. Il suffit de calculer la distance AH en se plaçant dans le triangle (AHB) : $AH = l.sin\alpha$

Le signe du moment est donné par le sens de rotation potentiel induit par l'action mécanique $\vec{F}$. Dans notre exemple la clé va tourner dans le sens négatif.

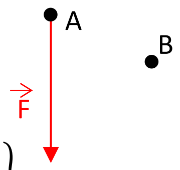
On en déduit : $\overrightarrow{M_{A,main\to 1}} = -l.F.\sin\alpha\,.\vec{z}$

Torseurs particuliers

Torseur glisseur

Un glisseur est un torseur associé à un vecteur lié.

$$\{\boldsymbol{T_{ext\to S}}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ext\to S}}} \\ \vec{\boldsymbol{0}} \end{Bmatrix}_A$$



$$\{T_{ext\to S}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext\to S}} = \vec{F} \\ \overrightarrow{M_{B,ext\to S}} = \overrightarrow{M_{A,ext\to S}} + \overrightarrow{R_{ext\to S}} \wedge \overrightarrow{AB} \end{Bmatrix}_B$$

En tout point M appartenant au support de la force $\vec{F}$, on aura $\overrightarrow{M_{M,ext\to S}} = \vec{0}$

Ce type de torseur modélise l'action mécanique d'une force $\vec{F}$ qui s'applique en un point A.

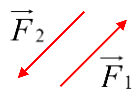
<u>Remarque :</u> Le moment d'une action mécanique est nul en tout point se trouvant sur le support de cette action mécanique.

<u>Remarque :</u> Dans l'exemple précédent, le torseur associé à l'action mécanique exercé par la main sur la clé est un glisseur.

Torseur couple

Un torseur couple est un torseur à résultante nulle.

$$\{\boldsymbol{T_{ext\to S}}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{0}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{M_{A,ext\to S}}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{0}} \\ \vec{\boldsymbol{M}} \end{Bmatrix}$$



La résultante est nulle, le moment est le même quel que soit le point de réduction du torseur.

Complémentarité avec le torseur cinématique

Le torseur cinématique de la liaison pivot du solide 2 par rapport à 1 s'écrit :

$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

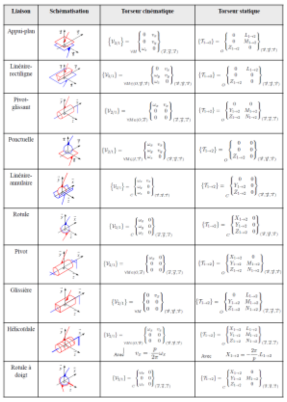
Le torseur des actions mécaniques transmissibles s'écrit :

$$\{T_{2\to 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Si un mouvement est possible selon un degré de liberté, il ne sera pas possible de transmettre une action mécanique dans cette direction. Réciproquement si un mouvement est impossible selon un degré de liberté, il sera possible de transmettre une action mécanique selon cette direction.

Il en résulte que le torseur des actions mécaniques transmissibles du solide 2 sur le solide 1 peut se déduire du torseur cinématique du solide 2 par rapport au solide 1.

Tableau récapitulatif des torseurs des AM de contact des liaisons parfaites



Liaison	Schématisation	Torseur cinématique	Torseur statique
Appui-plan		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\forall M\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{1\to 2} \\ 0 & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Linéaire-rectiligne		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\forall M\in(O,\vec{x},\vec{z})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{1\to 2} \\ 0 & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Pivot-glissant		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall M\in(O,\vec{x})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & N_{1\to 2} \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Ponctuelle		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\forall M\in(O,\vec{z})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Linéaire-annulaire		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1\to 2} & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Rotule		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Pivot		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall M\in(O,\vec{x})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & N_{1\to 2} \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Glissière		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall M\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{1\to 2} \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & N_{1\to 2} \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Hélicoïdale		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall M\in(O,\vec{x})\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ Avec $v_x = \frac{p}{2\pi}\omega_x$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & L_{1\to 2} \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & N_{1\to 2} \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ Avec $X_{1\to 2} = -\frac{2\pi}{p}L_{1\to 2}$
Rotule à doigt		$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{T_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}_{C\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Applications aux problèmes plans

Pour certains problèmes, nous adopteront une modélisation plane, dans ce cas :

- toutes les résultantes appartiennent alors au même plan $(\vec{x},\vec{y})$ par exemple,
- tous les moments sont perpendiculaires à ce plan (direction $\vec{z}$).

Les torseurs des actions mécaniques transmissibles ont alors la forme simplifiée suivante :

$$\{T_{2\to 1}\} = \begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les valeurs représentées par « - » ne sont pas nécessairement nulles mais ne sont pas prises en compte dans le problème étudié.

<u>Exemple :</u> Pour un problème plan $(0,\vec{x},\vec{y})$

<u>Liaison pivot d'axe</u> $(A,\vec{z})$

$$\{T_{2\to 1}\} = \begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

<u>Liaison glissière d'axe</u> $(A,\vec{x})$

$$\{T_{2\to 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

<u>Liaison ponctuelle de normale</u> $(A,\vec{y})$

$$\{T_{2\to 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$