

2_ Principe Fondamental de la Statique

Compétences attendues :

- ✓ Isoler un système et justifier l'isolement.
- ✓ Définir les éléments influents du milieu extérieur.
- ✓ Simplifier un modèle de mécanisme.
- ✓ Déterminer les actions mécaniques en statique.

1. Introduction

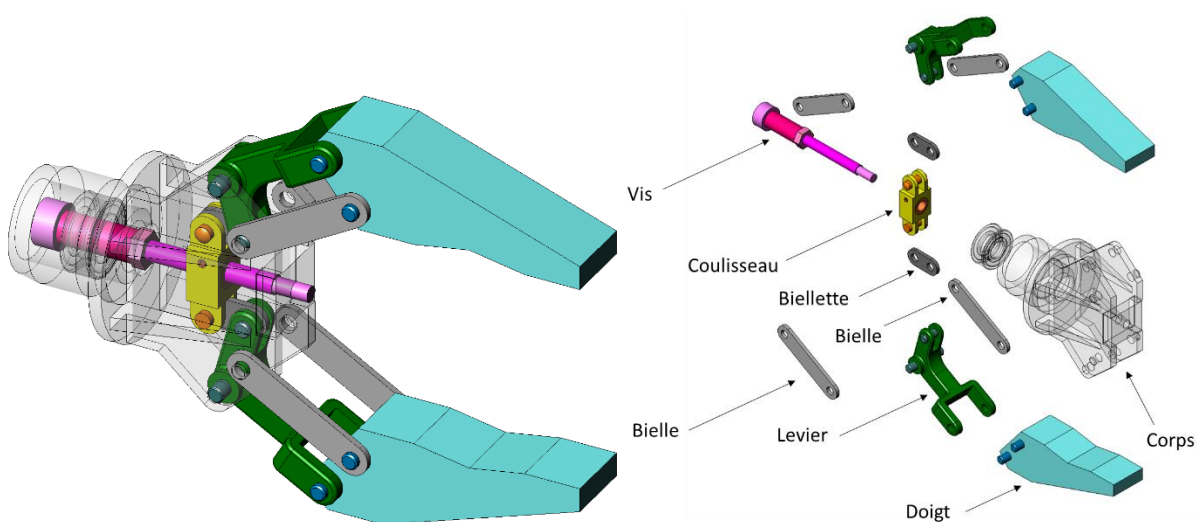
La conception d'un système mécanique consiste à dimensionner ses pièces et ses liaisons.

L'objectif de ce cours est de déterminer les efforts transitant à travers les différents éléments d'un mécanisme afin de les dimensionner.

Pour cela, il est nécessaire de connaître les relations traduisant l'influence de la géométrie du mécanisme sur la transmission des efforts entre les éléments qui le compose. Ce sont les deux domaines de la statique et de la dynamique qui vont nous permettre d'écrire les équations reliant les grandeurs cherchées et connues.

Cette leçon traite uniquement de l'étude statique des mécanismes, c'est à dire lorsque ceux-ci sont en équilibre. La dynamique sera vue en deuxième année.

*Nous allons dans ce chapitre, étudier **la pince du robot ERICC3**. Les différentes vues, mises en plan et nomenclatures sont fournies à la fin de ce cours.*



2. Notions préliminaires

2.1. Notion d'équilibre

Définition : Un ensemble (E) est en équilibre par rapport à un référentiel R supposé galiléen si, au cours du temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport à R .

Remarques :

- Tout référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport aux axes du repère de Copernic est un référentiel galiléen.
- Un ensemble matériel en équilibre n'est donc pas forcément immobile ; il peut être en mouvement de translation rectiligne uniforme.
- La Terre est généralement considérée comme un référentiel galiléen. Mais cette approximation n'est plus valable pour l'étude du mouvement d'un avion ou du décollage d'une fusée par exemple.

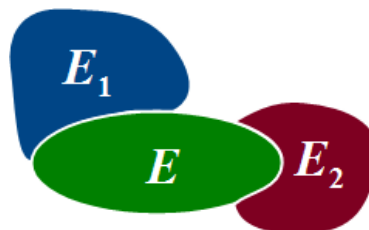
2.2. Equilibre d'un système matériel E par rapport à un repère R

Un système E est en équilibre par rapport à un repère R si, à un instant donné, tous ses éléments sont immobiles par rapport à R .

$$E \text{ est en équilibre} \leftrightarrow \forall M \in E, \overrightarrow{V_{M \in E/R}} = \vec{0}$$

2.3. Actions mécaniques extérieures à un système matériel E

La frontière d'isolement permet de séparer l'ensemble E du milieu extérieur \bar{E} . Le milieu extérieur \bar{E} agit sur l'ensemble E . On note $\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\}$ l'ensemble des actions mécaniques extérieures agissant sur E .



Pour déterminer les actions mécaniques extérieures, on extrait les ensembles isolés et on recense pour chaque solide :

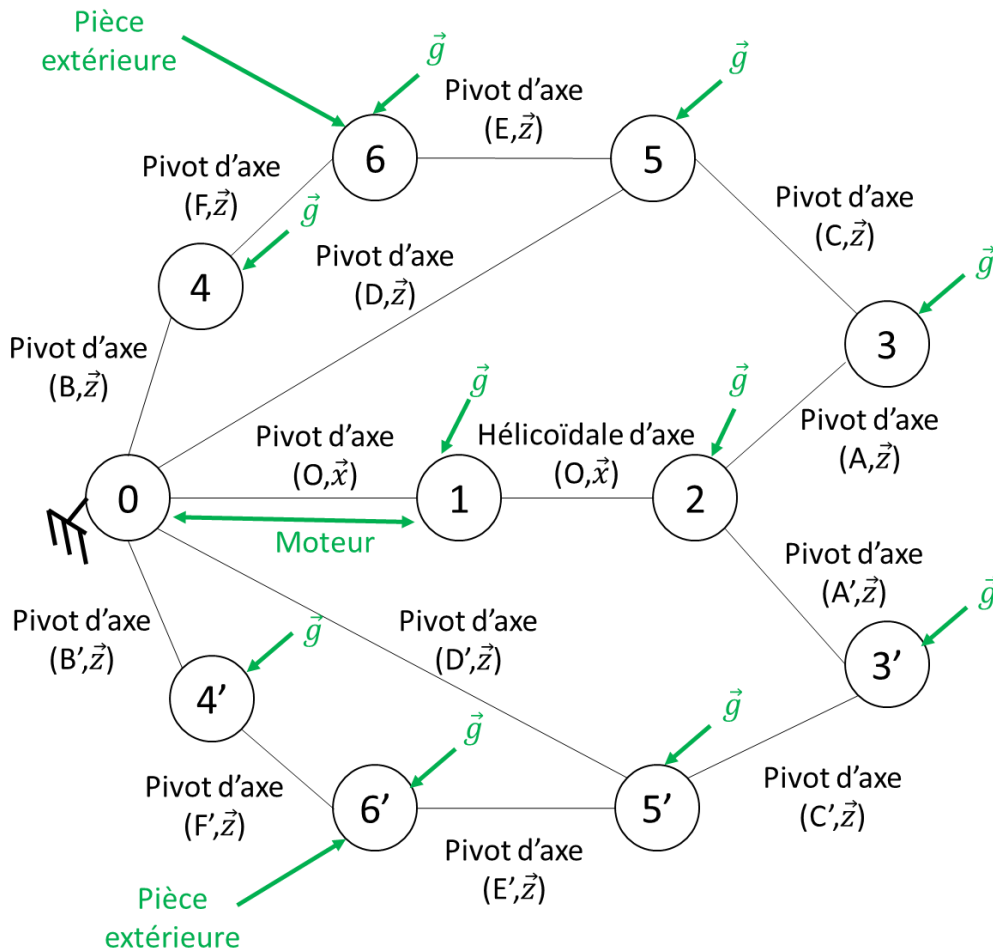
- les actions mécaniques de contact avec l'extérieur
- les actions mécaniques à distance exercées par l'extérieur

On parle de bilan des actions mécaniques extérieures (BAME).

2.4. Graphe des liaisons ou graphe de structure

Le graphe des liaisons permet de visualiser le ou les isolement(s) à réaliser et permet de rendre systématique la recherche des actions mécaniques extérieures.

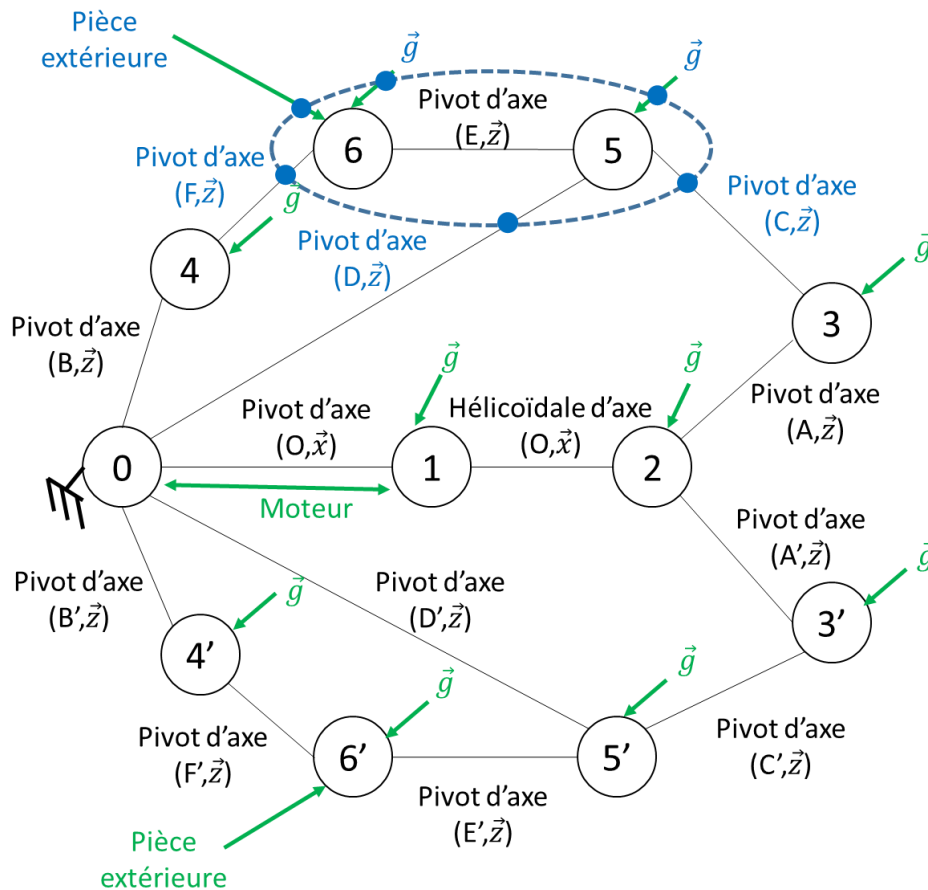
Le graphe des liaisons de la pince de robot est le suivant :



On ajoute sur le graphe des liaisons, les actions mécaniques à distance qui s'applique sur chaque solide ou les actions des ressorts, des moteurs par exemple (1 trait pour les forces, deux traits pour les couples). On repère bien le bâti (pièce de référence) pour ne pas l'isoler. On appelle en général graphe de structure ce graphe des liaisons plus complet.

2.5. Choix de la frontière d'isolement

Certaines actions mécaniques sont connues (ex : ressort, pesanteur...). Une frontière d'isolement doit faire apparaître au moins une action mécanique connue ou l'action mécanique inconnue recherchée.



Chaque fois que la frontière d'isolement coupe une action mécanique ou une ligne du graphe des liaisons, cela fera apparaître une action mécanique extérieure dans le bilan.

2.6. Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME)

Le bilan des actions mécaniques extérieures (abrégée BAME) permet, comme son nom l'indique, de dresser l'inventaire des actions mécaniques extérieures à l'ensemble (E) isolée. Il découle directement des identifications faites grâce au graphe de liaisons et aux frontières d'isolement. Il y ajoute les caractéristiques de chaque action mécanique sous la forme d'une liste de torseurs d'actions mécaniques extérieures s'exerçant sur l'ensemble (E) isolé.

3. Enoncé du Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Remarque préliminaire : Le PFS est un cas particulier du PFD : lorsque la variation de vitesse d'un solide dans un R_g est nulle c'est que la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle...

On utilise le PFS pour déterminer tout ou partie des actions s'exerçant sur un solide (au sens de la mécanique) ou un ensemble de solides dans le but de dimensionner un système (les solides constitutifs et les liaisons entre eux) afin de répondre à un cahier des charges (durée de vie, non déformation, etc...).

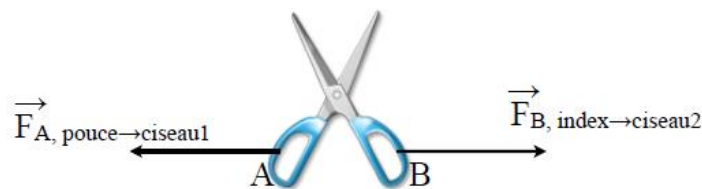
Si un système matériel E est en équilibre par rapport à un repère galiléen, le torseur résultant des actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées est égal au torseur nul.

$$\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\} = \{0\}$$

Remarques :

- Le torseur des actions mécaniques extérieures $\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\}$ est constitué par la somme de tous les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées
- Il faudra prendre soin de réduire tous les torseurs au **même point** avant de faire la somme
- Le choix du point de réduction sera fait afin de minimiser les calculs
- L'équilibre d'un système est un état que l'on constate avant d'appliquer le PFS
- La nullité du torseur des actions mécaniques extérieures, n'implique pas forcément l'équilibre

Exemple : $\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\} = \{0\}$ mais les ciseaux ne sont pas en équilibre !



3.1. Théorèmes généraux de la statique

$$\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{A, \bar{E} \rightarrow E}} \end{array} \right\}_A, \text{ A étant un point quelconque de l'espace.}$$

Pour un solide E en équilibre par rapport à un repère galiléen, le principe fondamental de la statique peut se décliner en deux théorèmes :

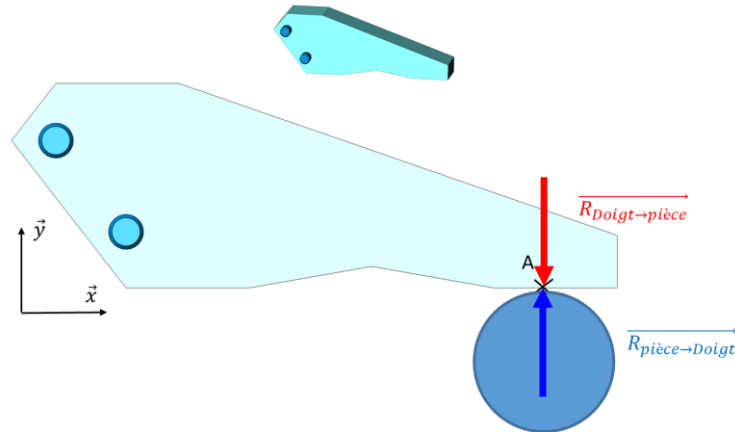
Théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E}} = \vec{0}$

Théorème du moment statique : $\overrightarrow{M_{A, \bar{E} \rightarrow E}} = \vec{0}$

Conséquence : En projetant ces 2 équations vectorielles sur un repère orthonormé, on trouve 6 équations scalaires. L'application du PFS revient donc à écrire un système de 6 équations scalaires.

3.2. Principe des actions réciproques

Si un système matériel (Pièce) exerce une action mécanique sur un autre système (Doigt), alors (Doigt) exerce sur (Pièce) une action opposée.



$$\{T_{\text{pièce} \rightarrow \text{Doigt}}\} = -\{T_{\text{Doigt} \rightarrow \text{pièce}}\}$$

4. Utilisation du Principe Fondamental de la Statique

4.1. Ordonnancement des isolements

Le choix des isolements est important. Si l'on ne veut pas faire de calculs inutiles, il faut d'abord élaborer une stratégie d'isolements. La première des choses à faire pour cela est de repérer la grandeur cherchée (inconnue) et la (ou les) grandeur(s) connue(s) (donnée(s)). Ce sont elles qu'il faut relier l'une à l'autre. A partir de là, la mise en équation guide les choix d'isolements à réaliser : selon les inconnues à déterminer pour écrire une relation complètement connue entre la grandeur cherchée et la grandeur connue, il faudra isoler différents ensembles de solides.

4.2. Hypothèses d'étude

Lors d'une étude de statique, on supposera toujours que :

- le référentiel d'étude est galiléen ;
- les solides sont indéformables ;
- les liaisons sont géométriquement parfaites.

D'autres hypothèses peuvent s'y ajouter : prise en compte du frottement, action de la pesanteur négligée, hypothèse de problème plan, ...

4.3. Isostatisme et hyperstatisme

Avant tout calcul, il s'agit de vérifier que le problème est soluble !

Mathématiquement, cela se traduit par le fait qu'il ne faut pas que le problème présente plus d'inconnues que d'équations ! Or, avec le PFS, on peut écrire 6 équations scalaires par isolement.

Le Principe Fondamental de la Statique introduit deux équations vectorielles :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{E \rightarrow E}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A, E \rightarrow E}} = \vec{0} \end{cases}$$

En projetant ces deux équations vectorielles dans une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, nous obtenons six équations scalaires, 3 pour la résultante et 3 pour le moment. Soit r_G le rang de ce système d'équations, r_G est le nombre d'équations linéairement indépendantes et $r_G \leq 6$. Il suffit donc de faire le bilan des inconnues du problème et du nombre d'équations. On appelle I_S le nombre d'inconnues du problème. Nous pouvons donc conclure :

- si $r_G \leq I_S$ alors le problème n'est pas résolvable. Il est HYPERSTATIQUE (nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations linéairement indépendantes). Pour résoudre ce problème, il faut introduire des équations supplémentaires (lois de comportement, ...) ou alors reprendre la modélisation des actions mécaniques qui s'exercent sur le solide S. L'hyperstatisme impose des contraintes géométriques très fortes ; la mise en position des pièces doit être très précise pour permettre le montage. Cela coûte cher. Par contre, cela a l'avantage de rigidifier le mécanisme, qui résistera de ce fait mieux aux actions mécaniques qui s'y appliquent.
- si $r_G = I_S$ alors le problème est résolvable. Il est ISOSTATIQUE (nombre d'inconnues égal au nombre d'équations linéairement indépendantes). C'est le cas idéal : il est important de pouvoir quantifier les inconnues de liaison pour pouvoir dimensionner les différents composants du mécanisme.

Remarque : Pour un mécanisme constitué de n solides, il sera possible de réaliser (n-1) isolements indépendants.

Remarques :

- Une grande majorité des produits ne sont pas isostatiques, mais hyperstatiques : nos chaises ont bien quatre pieds ! Lorsque l'on s'assied dessus, les petites déformations induites comblent les défauts géométriques et la stabilité est présente. En plus de la rigidité !
- S'il y a moins d'inconnues que d'équations, on peut résoudre et on parle de problème hypostatique. Mais ce cas n'existe pas dans les mécanismes, car cela implique qu'au moins

l'une de ses pièces conserve au moins un degré de liberté, ce qui est nuisible au fonctionnement. Il va présenter des instabilités, des mouvements parasites.



Système isostatique :
le tabouret n'est jamais bancal



Système hyperstatique :
le tabouret n'est stable que si tout est parfait (sol plan, 4 pieds de même longueur et disposé exactement de la même façon sur l'assise)



Système hypostatique :
le tabouret ne peut être stable. Il possède une mobilité supplémentaire, et ne satisfait donc pas le besoin de l'utilisateur

4.4. Méthode de résolution

Lorsque l'on s'est assuré de la solvabilité du problème, il ne reste plus qu'à le résoudre. Or, pour résoudre méthodiquement et donc correctement un problème de statique complexe, il est nécessaire de respecter quelques étapes qui permettent d'adopter la meilleure démarche à suivre. Elles sont les suivantes :

1. Etablir le graphe de liaisons du mécanisme et y faire apparaître l'ensemble des actions mécaniques (ne pas oublier les actions de pesanteur).
2. Identifier la (les) grandeur(s) cherchée(s) (c'est-à-dire celles que l'on a besoin de déterminer, par exemple la raideur d'un ressort, le diamètre du corps d'un vérin, ou encore l'action mécanique transmise par une liaison) et la (les) grandeur(s) connue(s) (par exemple un effort ou une pression dont on connaît la valeur et qui agit sur le système afin de réaliser l'opération voulue).

Une fois ces deux premières étapes réalisées, il devient possible de déterminer quel(s) isolement(s) (de solides ou d'ensembles de solides) vont nous permettre de déterminer la grandeur cherchée grâce à l'utilisation du PFS.

3. Isoler un ensemble de solides (sans le bâti !) dont la frontière coupe d'une part la connexion liée à la grandeur cherchée (inconnue), et d'autre part la (les) connexion(s) liée(s) à la (aux) grandeur(s) connue(s) ; de façon à les relier.
4. Ecrire les torseurs relatifs aux actions mécaniques extérieures à cet ensemble isolé, dont les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons qui coupent la frontière d'isolement sur le graphe de liaisons.
5. Appliquer le Principe fondamental de la Statique en un point bien choisi. Le choix de ce point est raisonné ; il doit permettre d'écrire les équations intéressantes pour répondre

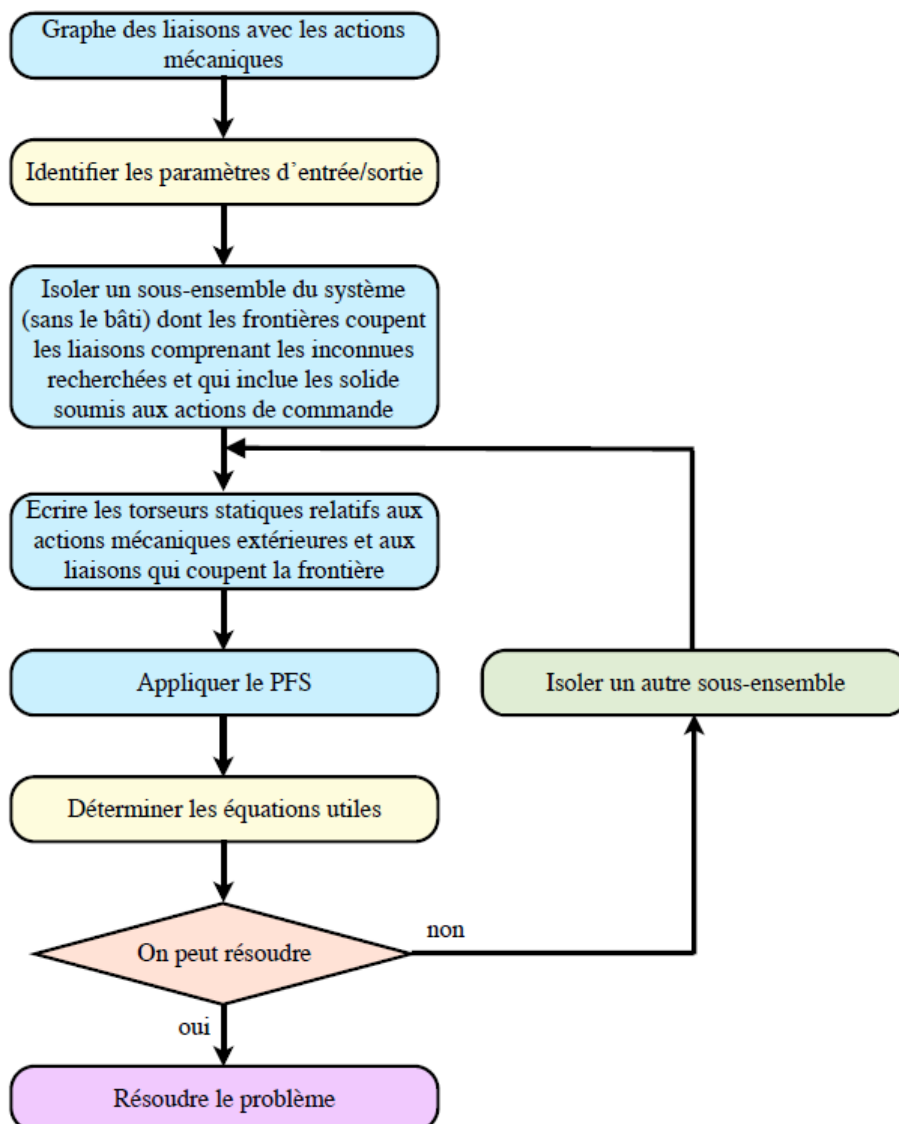
à la problématique. Après avoir défini l'isolement intéressant et écrit les torseurs modélisant les actions mécaniques extérieures, on regarde les inconnues qui vont apparaître dans les équations (inconnues de liaison). On évite d'avoir à les déterminer si l'on n'en a pas besoin. On fait donc en sorte de ne pas les faire apparaître dans les équations en écrivant les moments au point caractérisant la liaison en question.

6. Observer le système d'équations obtenu et déterminer quelle(s) équation(s) (en moment et/ou en résultante) parmi les six que donne le PFS permet(tent) de relier la grandeur cherchée (inconnue) à (aux) grandeur(s) connue(s).

Il existe alors deux cas possibles :

- soit il est possible de déterminer la grandeur cherchée et on résout alors le problème ;
- soit il est impossible de déterminer la grandeur cherchée, car des inconnues (de liaison) apparaissent dans l'équation. On doit alors isoler un autre ensemble (sans le bâti !) et réappliquer le PFS, en utilisant éventuellement le Principe des actions mutuelles, afin de déterminer ces inconnues.

Cette méthode peut être résumée par l'organigramme suivant :



4.5. Cas particuliers d'application du PFS

4.5.1. Hypothèse de problème plan

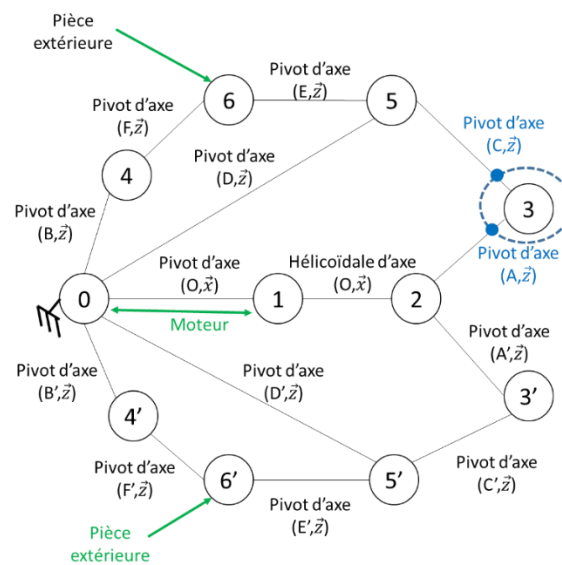
Pour certains problèmes, nous adopteront une modélisation plane. Dans le cas du plan (\vec{x}, \vec{y}) par exemple (de normale \vec{z}), le torseur des actions mécaniques transmissibles a alors la forme simplifiée suivante :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

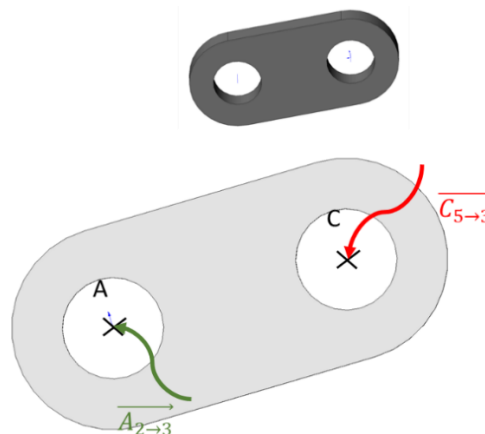
Le Principe Fondamental de la Statique ne donne alors plus que trois équations scalaires :

- deux équations scalaires issues du Théorème de la résultante (suivant \vec{x} et \vec{y})
- une équation scalaire issue du Théorème du moment (suivant \vec{z}).

4.5.2. Equilibre d'un système soumis à 2 actions modélisables par des glisseurs



Les directions de $\vec{A}_{2 \rightarrow 3}$ et de $\vec{C}_{5 \rightarrow 3}$ sont à priori inconnues.



Ces deux actions mécaniques peuvent être modélisées par deux glisseurs :

$$\{T_{A_{2 \rightarrow 3}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{2 \rightarrow 3}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \text{ et } \{T_{C_{5 \rightarrow 3}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{C_{5 \rightarrow 3}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

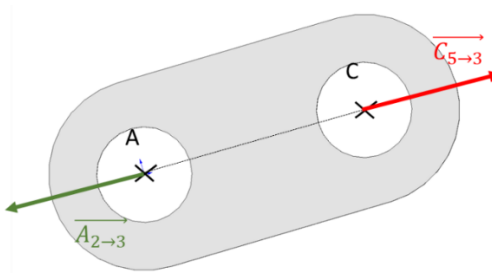
Le solide (3) est en équilibre. L'application du PFS donne les équations suivantes :

Théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{A_{2 \rightarrow 3}} + \overrightarrow{C_{5 \rightarrow 3}} = \vec{0}$ $\overrightarrow{A_{2 \rightarrow 3}}$ et $\overrightarrow{C_{5 \rightarrow 3}}$ sont opposés

Théorème du moment statique au point A : $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{C_{5 \rightarrow 3}} = \vec{0}$ $\overrightarrow{C_{5 \rightarrow 3}}$ et \overrightarrow{AC} sont colinéaires

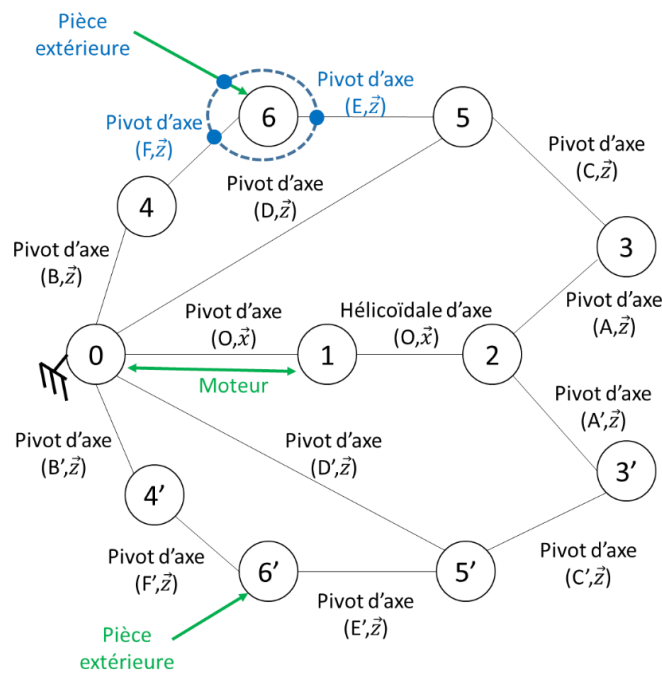
Théorème : Si un solide (ou un ensemble de solides) est en équilibre sous l'action de 2 efforts modélisables par des glisseurs, ceux-ci sont colinéaires et de somme nulle.

Les résultantes ont comme support (AC).

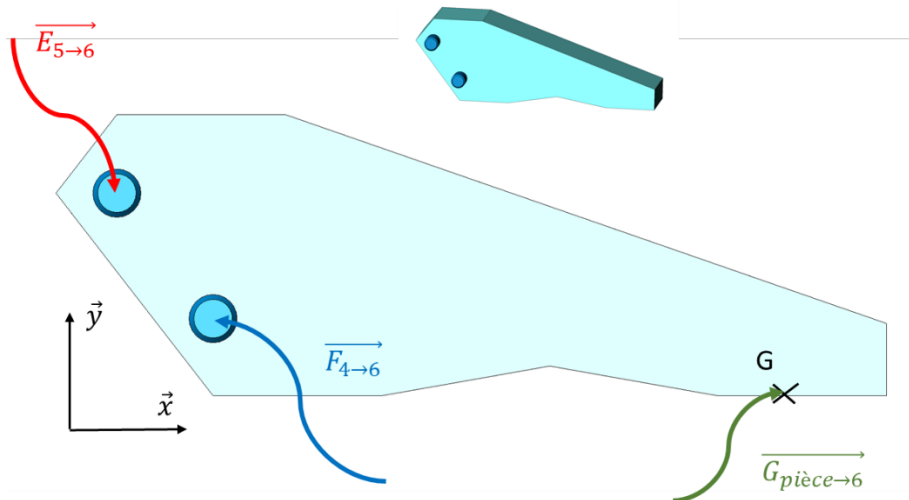


Ce résultat fondamental pourra être utilisé directement dans les applications.

4.5.3. Equilibre d'un système soumis à 3 actions modélisables par des glisseurs



Les directions de $\overrightarrow{G_{pièce \rightarrow 6}}$, $\overrightarrow{E_{5 \rightarrow 6}}$ et $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}}$ sont à priori inconnues



Ces trois actions mécaniques peuvent être modélisées par trois glisseurs :

$$\{T_{G_{pièce \rightarrow 6}}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{G_{pièce \rightarrow 6}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G, \quad \{T_{F_{4 \rightarrow 6}}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_F \quad \text{et} \quad \{T_{E_{5 \rightarrow 6}}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{E_{5 \rightarrow 6}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_E$$

(6) est en équilibre. L'application du PFS donne les équations suivantes :

Théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{G_{pièce \rightarrow 6}} + \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}} + \overrightarrow{E_{5 \rightarrow 6}} = \vec{0} \quad (1)$

Théorème du moment statique au point G : $\overrightarrow{GF} \wedge \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}} + \overrightarrow{GE} \wedge \overrightarrow{E_{5 \rightarrow 6}} = \vec{0} \quad (2)$

On pose $\vec{X} = \overrightarrow{GF} \wedge \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}}$ et $\vec{Y} = \overrightarrow{GE} \wedge \overrightarrow{E_{5 \rightarrow 6}}$, l'équation (2) nous permet d'affirmer :

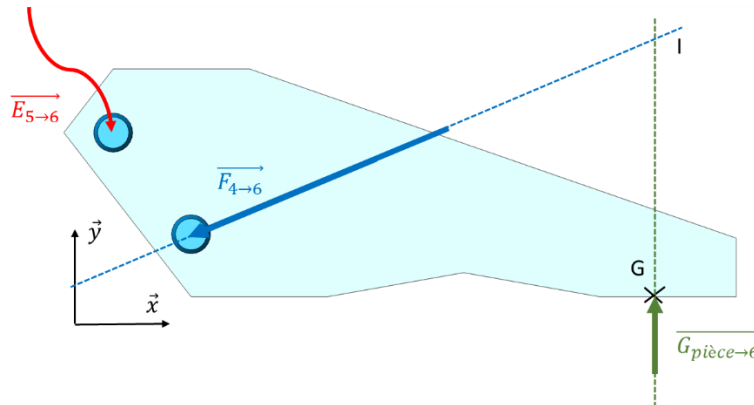
- \vec{X} est perpendiculaire à \overrightarrow{GF} et à $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}}$ donc \vec{X} est la normale au plan P_1 formé par G, F et $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}}$
- \vec{Y} est perpendiculaire à \overrightarrow{GE} et à $\overrightarrow{E_{5 \rightarrow 6}}$ donc \vec{Y} est la normale au plan P_2 formé par G, E et $\overrightarrow{E_{5 \rightarrow 6}}$
- De plus, \vec{X} et \vec{Y} sont colinéaires

Les plans P_1 et P_2 ont même normale et contiennent tous les deux le point G, ils sont donc confondus : $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}}$ et $\overrightarrow{E_{5 \rightarrow 6}}$ sont coplanaires.

L'équation (1), nous permet enfin d'affirmer que $\overrightarrow{G_{pièce \rightarrow 6}}$, $\overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}}$ et $\overrightarrow{E_{5 \rightarrow 6}}$ sont coplanaires.

1^{er} cas : $\vec{G}_{pièce \rightarrow 6}$ et $\vec{F}_{4 \rightarrow 6}$ sont concourants :

Soit I l'intersection de $\vec{G}_{pièce \rightarrow 6}$ et $\vec{F}_{4 \rightarrow 6}$ si elle existe.

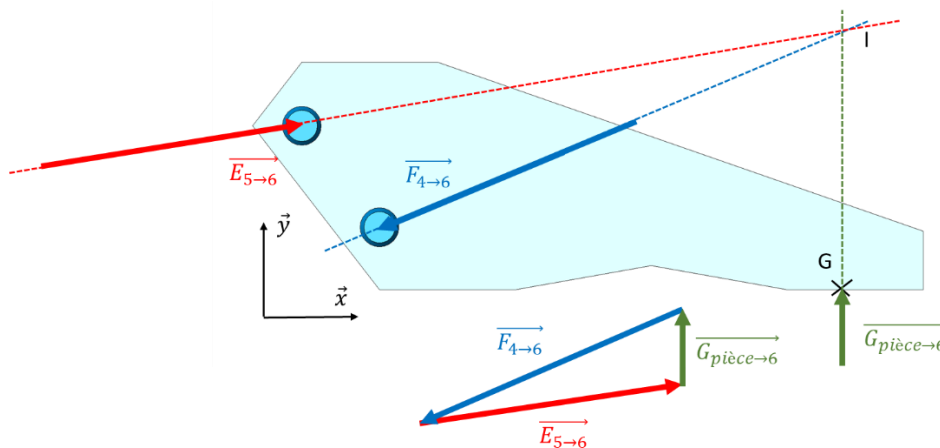


Par définition : $\vec{M}(I, \vec{G}_{pièce \rightarrow 6}) = \vec{0}$ et $\vec{M}(I, \vec{F}_{4 \rightarrow 6}) = \vec{0}$

Exprimons le théorème du moment statique en I.

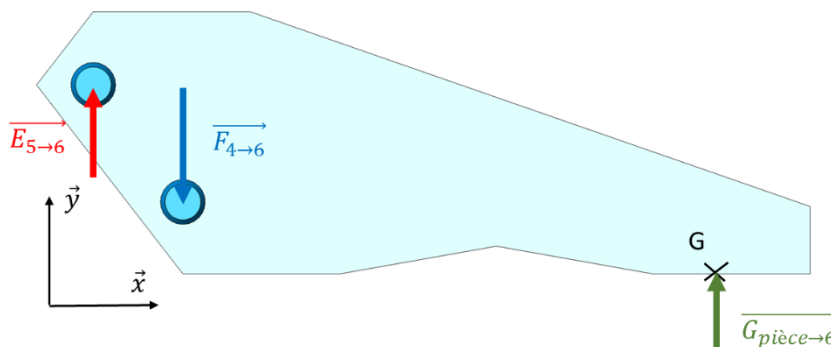
$$\vec{M}(I, \vec{G}_{pièce \rightarrow 6}) + \vec{M}(I, \vec{F}_{4 \rightarrow 6}) + \vec{M}(I, \vec{E}_{5 \rightarrow 6}) = \vec{0}. \text{ D'où } \vec{M}(I, \vec{E}_{5 \rightarrow 6}) = \vec{0}$$

Les 3 glisseurs sont alors concourants en I



2nd cas : $\vec{G}_{pièce \rightarrow 6}$ et $\vec{F}_{4 \rightarrow 6}$ sont parallèles :

$\vec{G}_{pièce \rightarrow 6} + \vec{F}_{4 \rightarrow 6} + \vec{E}_{5 \rightarrow 6} = \vec{0}$ entraîne nécessairement $\vec{G}_{pièce \rightarrow 6}$, $\vec{F}_{4 \rightarrow 6}$ et $\vec{E}_{5 \rightarrow 6}$ parallèles.



Théorème : Si un solide, soumis à trois actions modélisables par des glisseurs, est en équilibre, alors ces trois glisseurs sont :

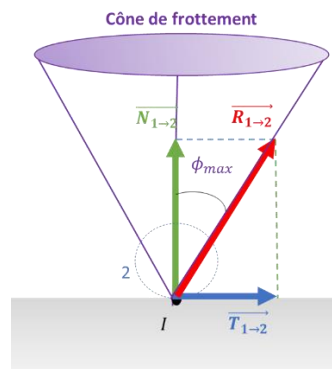
- coplanaires
- concourants ou parallèles
- de somme vectorielle nulle

Ce résultat fondamental pourra être utilisé directement dans les applications.

5. Résolution des problèmes de statique avec frottement

5.1. Simplification des lois de Coulomb en statique plane

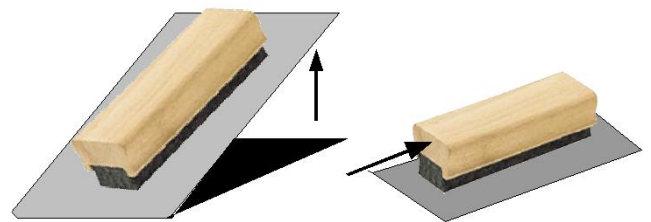
L'étude est faite dans un plan (\vec{x}, \vec{y}) . Les lois de Coulomb sont toujours vraies mais les relations sont simplifiées car la direction de l'effort tangentiel est connue. Seuls la norme et le sens doivent être déterminés.



Le modèle du contact parfait implique que les forces sont perpendiculaires aux surfaces de contact, cependant plusieurs contre-exemples montrent que cette hypothèse ne convient pas toujours pour modéliser certains phénomènes.

Exemple : Brosse sur plateau

Malgré l'inclinaison du plateau, la brosse reste en équilibre. Il existe bien une force tangentielle qui s'oppose au glissement de la brosse.



Ces exemples simples montrent qu'il existe une action mécanique tangentielle, opposée au mouvement, au niveau de la surface de contact. Il est donc nécessaire de proposer un nouveau modèle de liaison pour tenir compte du frottement.

Remarque : Le frottement est souvent à l'origine des pertes énergétiques dans les liaisons mais son action peut être au contraire désirée (frein, limiteur de couple...).

Plus précisément, il y a entre deux pièces en contact :

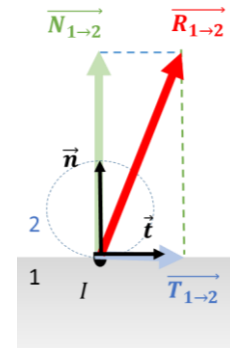
- Frottement s'il y a du mouvement
- Adhérence s'il n'y a pas de mouvement
- Equilibre strict à la limite entre frottement et adhérence (limite du mouvement)

5.2. Les lois de Coulomb (1781)

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel au point I. On suppose que le frottement n'est pas négligé.

On peut modéliser le torseur des actions mécaniques exercé par le solide S_1 sur S_2 de la manière suivante :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = N_{12} \cdot \vec{n} + T_{12} \cdot \vec{t} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$



5.2.1. Interprétation géométrique du frottement

Deux cas peuvent alors se présenter :

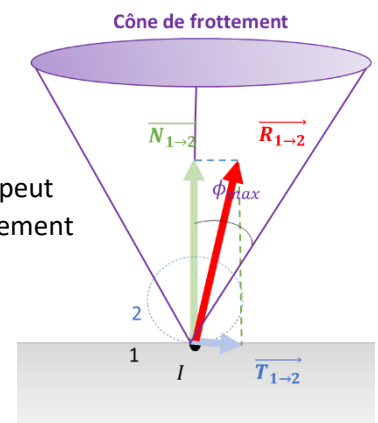
Cas du non glissement (roulement sans glissement, adhérence) : S_2 ne glisse pas sur S_1 : $\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$

- On ne connaît alors pas exactement $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ en direction et en sens
- $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| < f \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$.

En posant $f = \tan \varphi_{max}$, on appelle φ_{max} l'angle de frottement, on peut représenter graphiquement la force de contact. On appelle cône de frottement le cône de sommet I et de demi-angle au sommet φ_{max} .

La force $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est située à l'intérieur du cône de frottement.

$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ ne peut **JAMAIS SORTIR** du cône de frottement.



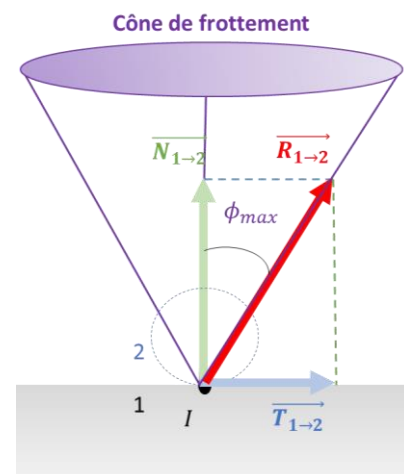
Cas du glissement : S_2 glisse sur S_1 : $\vec{V}_{I \in 2/1} \neq \vec{0}$

$$\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$$

La force $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est située exactement **SUR** le cône de frottement

La direction de $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est celle du vecteur vitesse de glissement
 $\vec{V}_{I \in 2/1} \neq \vec{0} : \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \wedge \vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$

Le sens de $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est opposé à celui de $\vec{V}_{I \in 2/1}$: $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{I \in 2/1} < 0$



5.2.2. Ordre de grandeurs du coefficient de frottement

Le coefficient de frottement dépend de nombreux critères :

- nature des matériaux en contact (critère prépondérant)
- état de surface (rugosité des surfaces en contact, ...)
- présence de particules entre les 2 solides (lubrification, oxydation, impuretés...)
- de la vitesse de glissement (plus grand à l'arrêt que lors du glissement)

Valeurs indicatives de μ_s et μ	Adhérence		Frottement	
	$\mu_s = f_s = \tan \varphi_s$		$\mu = f = \tan \varphi$	
Nature des matériaux en contact	A sec	Lubrifié	A sec	Lubrifié
Acier sur acier	0,18	0,12	0,15	0,09
Acier sur fonte	0,19	0,1	0,16	0,08 à 0,04
Acier sur bronze	0,11	0,1	0,1	0,09
Téflon sur acier	0,04		0,04	
Fonte sur bronze		0,1	0,2	0,08 à 0,04
Nylon sur acier			0,35	0,12
Bois sur bois	0,65	0,2	0,4 à 0,2	0,16 à 0,04
Métaux sur bois	0,6 à 0,5	0,1	0,5 à 0,2	0,08 à 0,02
Métal sur glace			0,02	
Pneu voiture sur route	0,8		0,6	0,3 à 0,1 sur sol mouillé
Cordage (neuf et sec)			0,3	
Cordage (usé et sec)			0,2	
Cordage (usé et mouillé)			0,1	

Remarque : Le coefficient de frottement est indépendant de l'intensité des actions exercées et de l'étendue des surfaces en contact.

Utilisation pratique des lois de Coulomb.

Pour étudier l'équilibre d'un solide lorsque celui-ci adhère ($\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \vec{0}$), on se place dans l'hypothèse limite où le solide commence à glisser (limite du glissement). Il n'y a donc pas encore de mouvement relatif mais on peut appliquer la loi de Coulomb correspondant au cas du glissement.

Différence entre coefficient de frottement d'adhérence et coefficient de frottement de glissement.

Si on reprend l'expérience physique initiale (brosse sur plan incliné), le solide commence à glisser lorsque la force atteint le cône de frottement. On passe alors de l'adhérence au glissement. Lorsque le solide glisse et est en régime établi, l'effort résistant est plus faible que celui pour lequel le solide à commencer à glisser (on peut incliner un peu moins le plan).

Ainsi on peut différencier coefficient d'adhérence f_0 et coefficient de frottement de glissement f .

On a toujours $f_0 > f$. On constate en pratique que les valeurs de ces coefficients sont très proches. On les confond très souvent par simplification de l'étude.

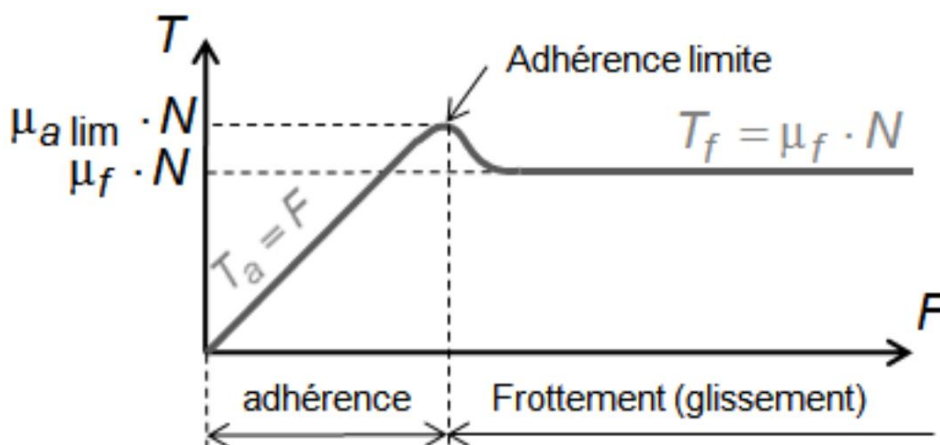
Remarque : Des modèles plus complexes de modélisation des frottements existent (hors programme). La science qui regroupe ces études s'appelle la tribologie.

Remarque : Evolution des actions tangentielles d'adhérence T_a et de frottement T_f .

Lors de la phase d'adhérence on peut augmenter progressivement la norme F de l'effort de mise en mouvement et le solide reste immobile car l'action tangentielle de norme T_a s'y oppose : on est dans le cône et $T_a = F$.

Lorsque l'on arrive à la limite d'adhérence, c'est-à-dire le bord du cône d'adhérence ($T_a = \mu_{a \text{ lim}} \cdot N$) alors l'action sur le solide est à la limite du glissement.

Lorsque le solide entre en mouvement, le coefficient d'adhérence devient coefficient de frottement et la valeur de l'action tangentielle de norme T_f est constante et égale à $\mu_f \cdot N$. On est sur le bord du cône de frottement.



La différence entre le coefficient de frottement μ_f et celui d'adhérence $\mu_{a \text{ lim}}$ crée une zone intermédiaire où le système peut successivement glisser et adhérer, c'est le phénomène de stick-slip.

5.2.3. Lois de Coulomb concernant le pivotement et le roulement

Les lois de Coulomb précédentes ont été obtenues pour un contact rigoureusement ponctuel et pour lequel $\overrightarrow{M}_{I,1 \rightarrow 2} = \vec{0}$.

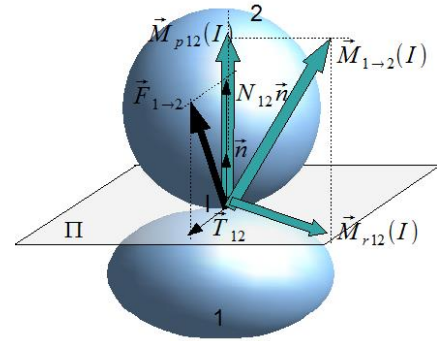
Dans la réalité, le contact se fait sur une petite surface et l'équation précédente n'est plus vraie. Une résistance apparaît donc lors d'une potentielle rotation du solide en contact quasi ponctuel : $\overrightarrow{M}_{I,1 \rightarrow 2} \neq \vec{0}$

On décompose $\overrightarrow{M}_{I,1 \rightarrow 2}$ en deux parties :

- Le moment de résistance au pivotement de S_1 sur S_2 :

$$\overrightarrow{M}_{P,I,1 \rightarrow 2} = (\overrightarrow{M}_{I,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$
- Le moment de résistance au roulement de S_1 sur S_2 :

$$\overrightarrow{M}_{r,I,1 \rightarrow 2} = \overrightarrow{M}_{I,1 \rightarrow 2} - \overrightarrow{M}_{P,I,1 \rightarrow 2}$$



L'action mécanique de 1 sur 2 est donc modélisée par le torseur suivant :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} = N_{12} \cdot \vec{n} + T_{12} \cdot \vec{t} \\ \overrightarrow{M}_{I,1 \rightarrow 2} = \overrightarrow{M}_{P,I,1 \rightarrow 2} + \overrightarrow{M}_{r,I,1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_I$$

En considérant le vecteur rotation du mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1 $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}$ et ses composantes obtenues par projection $\overrightarrow{\Omega}_{P,2/1}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{r,2/1}$, on introduit des lois caractérisant les composantes du moment analogues à celles de Coulomb.

Lois de Coulomb pour le roulement :

Si $\overrightarrow{\Omega}_{r,2/1} \neq \vec{0}$ (il y a roulement entre S_1 et S_2) : $\overrightarrow{M}_{r,I,1 \rightarrow 2}$ est opposé à $\overrightarrow{\Omega}_{r,2/1}$ et $\|\overrightarrow{M}_{r,I,1 \rightarrow 2}\| = h \cdot \|\overrightarrow{N}_{12}\|$
 où h est le paramètre de résistance au roulement (unité : le mètre)

Si $\overrightarrow{\Omega}_{r,2/1} = \vec{0}$: $\Rightarrow \|\overrightarrow{M}_{r,I,1 \rightarrow 2}\| < h \cdot \|\overrightarrow{N}_{12}\|$

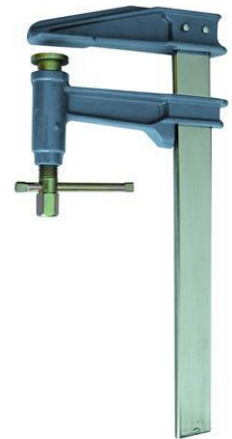
Lois de Coulomb pour le pivotement :

Si $\overrightarrow{\Omega}_{P,2/1} \neq \vec{0}$ (il y a pivotement entre S_1 et S_2) : $\overrightarrow{M}_{P,I,1 \rightarrow 2}$ est opposé à $\overrightarrow{\Omega}_{P,2/1}$ et $\|\overrightarrow{M}_{P,I,1 \rightarrow 2}\| = k \cdot \|\overrightarrow{N}_{12}\|$
 où k est le paramètre de résistance au pivotement (unité : le mètre)

Si $\overrightarrow{\Omega}_{P,2/1} = \vec{0}$: $\Rightarrow \|\overrightarrow{M}_{P,I,1 \rightarrow 2}\| < k \cdot \|\overrightarrow{N}_{12}\|$

5.3. Phénomène d'arc-boutement

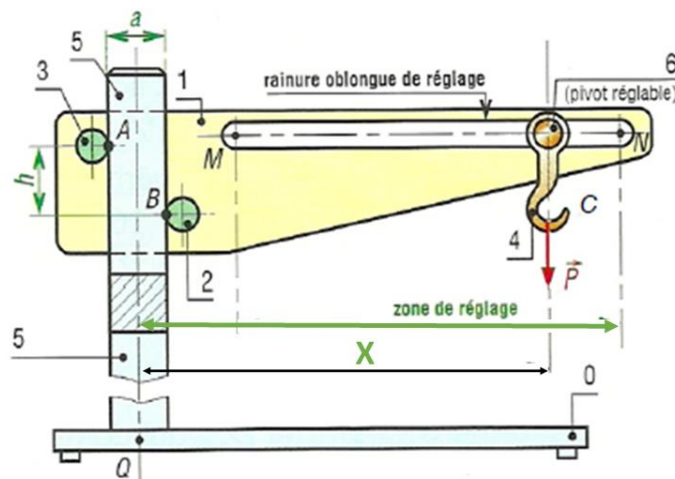
L'arc-boutement est un phénomène de blocage dû au frottement. Quel que soit l'effort extérieur appliqué au système, l'équilibre est assuré (et ce jusqu'à destruction du système !!!). L'arc-boutement est souvent une illustration de l'action positive du frottement. De nombreux dispositifs sont basés et fonctionnent grâce aux propriétés de l'arc-boutement : cale sous la roue d'une voiture ou sous la porte, serre-joint, roue libre (vélo), système vis-écrou irréversible, système de fixation, crayon sur un table, ...



Parfois, il est cependant néfaste (tiroir qui grince...)

Définition : On dit qu'il y a arc-boutement chaque fois que le phénomène d'adhérence provoque une impossibilité de mouvement (donc équilibre) quelle que soit l'intensité des efforts mis en jeu.

Exemple : Système de palan



On s'intéresse à un dispositif de maintien, réglable en hauteur, dont le crochet supposé maintenir une charge peut se déplacer de manière longitudinale.

L'ensemble est donc composé d'un crochet (4+6), en liaison ponctuelle avec un support (1). Celui-ci est en contact avec le bâti par l'intermédiaire de deux axes, notés (2) et (3), liés au support (1). L'ensemble est supposé tenir en équilibre grâce au phénomène d'arc-boutement qui s'opère grâce au positionnement des axes (2) et (3) en contact avec le bâti.

On fait les hypothèses suivantes :

- il y a du jeu entre le bâti (5) et le support (1) ;
- il existe du frottement entre les axes et le bâti, régi par les lois de Coulomb, avec un coefficient de frottement $f = \tan\varphi$;
- la charge à suspendre est accrochée au crochet, et exerce donc un effort noté \vec{P} exercé sur le crochet, de support vertical et dirigé vers le bas;
- la masse des différentes pièces du mécanisme est négligée;
- le référentiel lié au bâti est supposé galiléen;
- l'étude se fait dans le plan de la figure.

Objectif : On se propose d'étudier les conditions qui permettent de maintenir l'ensemble en équilibre, soit les conditions d'apparition du phénomène d'arc-boutement.

Isolement de l'ensemble support + crochet {1 + 2 + 3 + 4}

On suppose que le mécanisme est en équilibre, et on isole l'ensemble support + crochet {1 + 2 + 3 + 4}. Celui-ci est alors soumis à l'action de trois glisseurs :

- l'action du bâti sur l'axe (2) en B ;
- l'action du bâti sur l'axe (3) en A ;
- l'action de la masse suspendue sur le crochet (appliquée en C, d'axe vertical, dirigée vers le bas, notée \vec{P}).

Détermination graphique de la zone d'équilibre

D'après les propriétés vues en cours, l'équilibre de l'ensemble support + crochet {1 + 2 + 3 + 4} implique que graphiquement, **les résultantes des actions mécaniques doivent être coplanaires, concourantes ou parallèles et de somme géométrique nulle.**

Lois de Coulomb

Comme il existe du frottement entre les axes (2) et (3) et le bâti, l'application des lois de Coulomb donne alors une indication sur les directions possibles des actions mécaniques entre le bâti et les axes.

Les résultantes doivent donc (d'après les lois de Coulomb), appartenir au cône de frottement lié aux contacts ponctuels entre le bâti et les axes (2) et (3).

Condition d'arc-boutement

Pour être en équilibre, et donc être dans une position d'arc-boutement, les résultantes des actions mécaniques s'appliquant sur l'ensemble support + crochet {1 + 2 + 3 + 4} doivent satisfaire les conditions portant :

- sur l'**équilibre** (résultantes concourantes et somme géométrique nulle) ;
- sur les **lois de Coulomb** (résultantes des actions du bâti sur les axes (2) et (3) appartiennent aux cônes de frottement).

L'ensemble de ces deux conditions ne peut être satisfait que dans la zone « d'équilibre ». Hors de celle-ci, l'ensemble ne pourra pas être en équilibre et le support glissera sur le bâti.

Détermination graphique et analytique de la zone d'équilibre

$$X_{lim} = \frac{H}{2.f}$$

6. Frottement visqueux

Les frottements visqueux correspondent à un solide en mouvement dans un fluide. On distingue plusieurs régimes en fonction de la vitesse v par rapport au fluide. La force de frottement fluide est opposée à la vitesse de déplacement du solide.

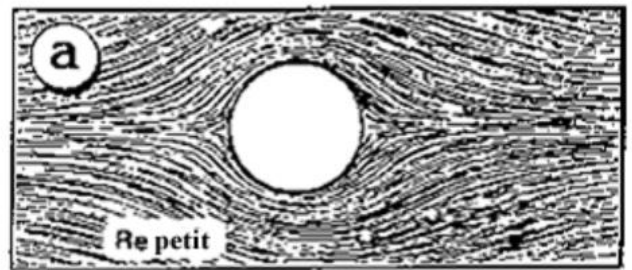
A très basse vitesse (< 5 m/s dans l'air) en régime laminaire

$$\vec{F}_{frot} = -k \cdot \eta \cdot \vec{v} \quad \text{avec} \quad k = 6 \cdot \pi \cdot R$$

(pour une boule de rayon R) Loi de Stokes

Avec :

- k : coefficient caractéristique de la géométrie du solide
- η : coefficient de viscosité du fluide (dépend de la température)

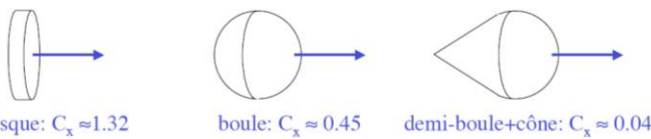
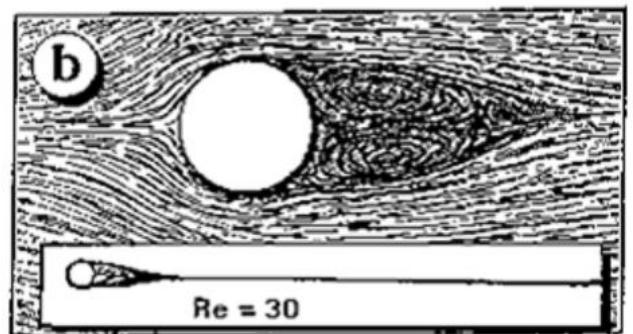


A plus grande ($5 < v < 20$ m/s dans l'air) en régime turbulent

$$\vec{F}_{frot} = -C_x \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S \cdot \vec{v}$$

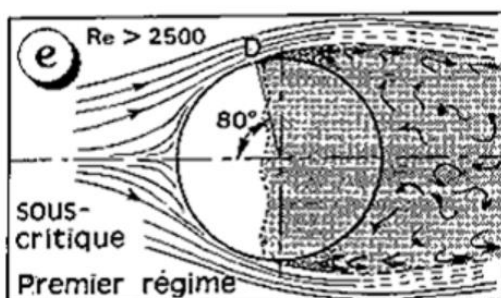
Avec :

- ρ : masse volumique du fluide
- S : aire du solide selon la direction perpendiculaire à la vitesse
- C_x : coefficient de traînée caractérisant la géométrie du solide (sans unité)



A très grande vitesse (mais $<$ vitesse du son)

$$\vec{F}_{frot} \text{ proportionnel à } -v^n \cdot \vec{v} \text{ avec } n > 2$$



7. Liaison équivalente

La détermination de liaisons équivalentes est ici présentée par la méthode **statique**. Une démarche semblable a été abordée avec une méthode cinématique.

Liaisons en série



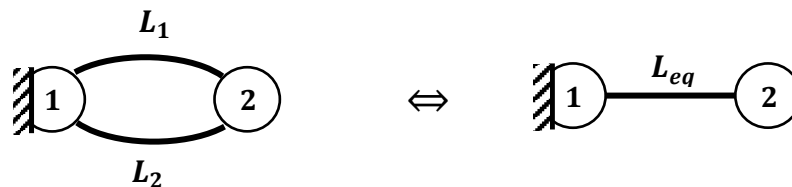
Lorsque deux pièces sont reliées par plusieurs liaisons successives, la liaison équivalente entre ces deux pièces possède un degré de mobilité supérieur ou égale au maximum des degrés de mobilité de chaque liaison intermédiaire.

Par application du PFS à chaque solide, on obtient :

$$\{\mathcal{J}_{eq}\}_M = \{\mathcal{J}_{n \rightarrow n-1}\}_M = \{\mathcal{J}_{n-1 \rightarrow n-2}\}_M = \dots = \{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}\}_M$$

Attention au choix du point M et de la base \mathfrak{B} – Attention à l'ordre des indices

Liaisons en parallèle



Des liaisons en parallèle permettent généralement de répartir les efforts que chacune va subir dans un contexte de dimensionnement de mécanismes. L'ensemble des plusieurs liaisons entre deux pièces réalise une nouvelle liaison à mobilité inférieure ou égale à la mobilité de chacune des liaisons.

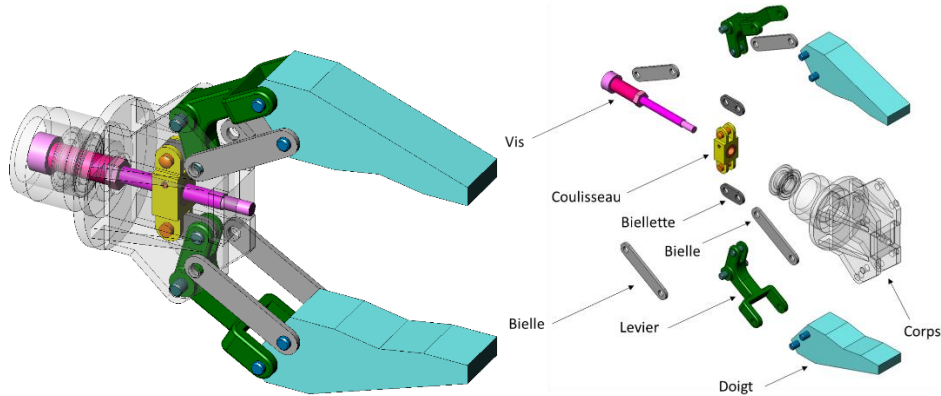
Par application du PFS au solide 2, on obtient :

$$\{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}\}_M = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}^i}\}_M = \{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}^1}\}_M + \{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}^2}\}_M + \dots + \{\mathcal{J}_{2 \rightarrow 1}^n}\}_M$$

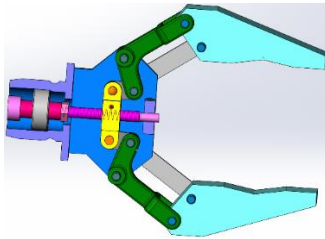
Attention au choix du point M et de la base \mathfrak{B} – Attention à l'ordre des indices

PINCE DE ROBOT ERICC3

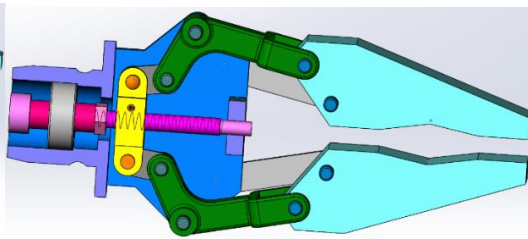
On s'intéresse à la pince de préhension. Les perspectives et le plan ci-dessous représentent une pince qui se fixe sur le poignet d'un robot de type ERICC3.



Vue éclatée avec les différents éléments de la pince

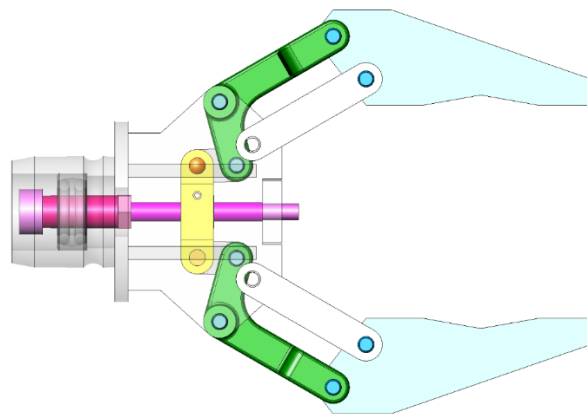


Pince en position ouverte



Pince en position fermée

NOMENCLATURE	
0	Corps
1	Vis
2	Coulisseau
3	Bielle
3'	Bielle
4	Bielle
4'	Bielle
5	Levier
5'	Levier
6	Doigt
6'	Doigt



Vue en coupe de la pince

