

Précision et Stabilité

Compétences attendues :

- ✓ Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- ✓ Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
- ✓ Déterminer les performances d'un système asservi.

1. SLCI

1.1. Rappels : Qualités d'un asservissement

- **La stabilité** est caractérisée par les variations autour de la réponse attendue.

*Un système est **stable** si soumis à un Dirac alors qu'il est en position d'équilibre stable il revient à cette même position d'équilibre stable. On dit aussi que le système est stable s'il offre une réponse finie et déterminée à une sollicitation finie et déterminée comme un échelon de consigne par exemple.*

- **La précision** est mesurée par la différence entre la consigne imposée et la réponse obtenue.

*Un système sera qualifié de **précis** si on arrive à rendre la différence entre la réponse attendue et la consigne imposée aussi petite que l'on veut. L'écart en sortie de comparateur est un bon indicateur.*

- **La rapidité** est mesurée par le temps de réponse à x% (souvent 5%) lorsque le système est soumis à un échelon de commande. C'est le temps à partir duquel la réponse reste à l'intérieur d'une bande $\pm x\%$ de la valeur finale.

La rapidité peut aussi être évaluée à partir de la pulsation propre puisque celle-ci caractérise, entre autres, la plage de fréquence sur laquelle le système peut être assimilé à un gain pur.

- **L'amortissement** est la capacité à atteindre rapidement et avec un minimum d'oscillations la valeur finale. Il est caractérisé par la valeur (en % de la valeur finale) du premier dépassement de la réponse indicielle. Celle-ci dépend, dans le cas d'un second ordre, de la valeur du coefficient d'amortissement :

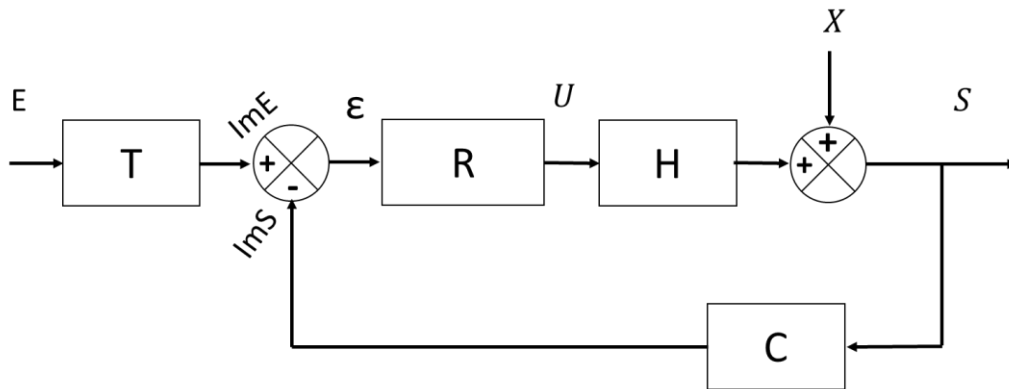
$z = 1$: meilleur temps de réponse sans dépassement en temporel

$z = 0.69$: meilleurs $t_{r5\%}$ avec dépassement en temporel

$z < \sqrt{2}/2$: résonance en fréquentiel

On notera l'importance de la réponse indicielle (réponse à un échelon) pour évaluer les caractéristiques d'un système asservi. On rappelle que toutes ces propriétés sont caractéristiques de la réponse en **boucle fermée**.

1.2 Schéma bloc standard



E : Consigne

ImS : Image de la sortie

X : Perturbation

C : Capteur

S : Sortie de processus

E : Ecart

T : Transducteur

H : Processus

ImE : Image de la consigne

U : Signal de commande

R : Régulateur ou Correcteur

PRENEZ TOUJOURS GARDE AUX GRANDEURS ENTRE LESQUELLES SONT DEFINIES LA FTBO ET LA FTBF.

La BO est définie entre (Ecart) et (Image de sortie) :

$$BO(p) = R(p)H(p)C(p)$$

La BF est définie entre (Image consigne) et (Image Sortie), le système étant bouclé :

$$BF_1(p) = \frac{R(p)H(p)C(p)}{1 + R(p)H(p)C(p)}$$

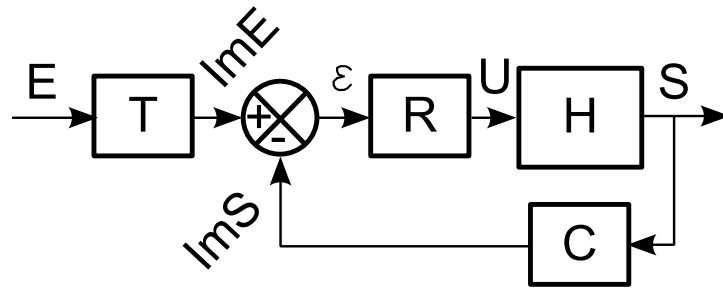
La BF peut aussi être définie entre (Consigne) et (Sortie Processus), le système étant bouclé :

$$BF_2(p) = \frac{T(p)R(p)H(p)}{1 + R(p)H(p)C(p)}$$

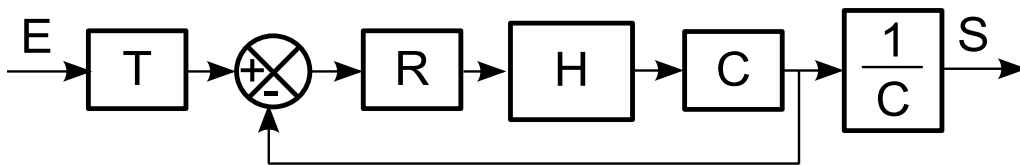
Remarque : Le système représenté a un sens si, lorsque la sortie de processus atteint la consigne, l'écart est nul. Cela implique que la **fonction de transfert du capteur a un gain statique identique à celle du transducteur** :

Si [Sortie Processus = Consigne] alors il faut [Image Sortie = Image Consigne]. Dans le cas fréquent où \$T(p)\$ et \$C(p)\$ sont assimilés à des gains purs : **\$C = T\$**

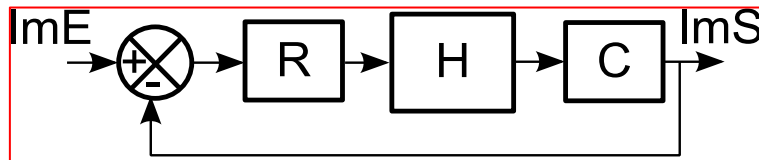
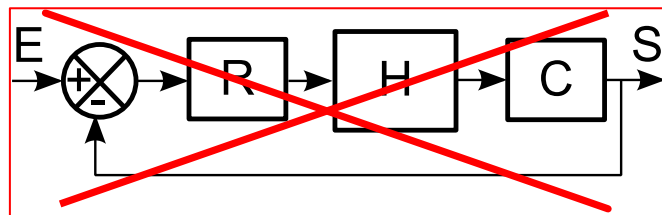
Remarque : Par déplacement des points de prélèvement, on peut transformer le schéma initial pour arriver à un **système à retour unitaire**.



Cette représentation ne traduit plus le processus physique : il s'agit de modifications mathématiques du modèle.



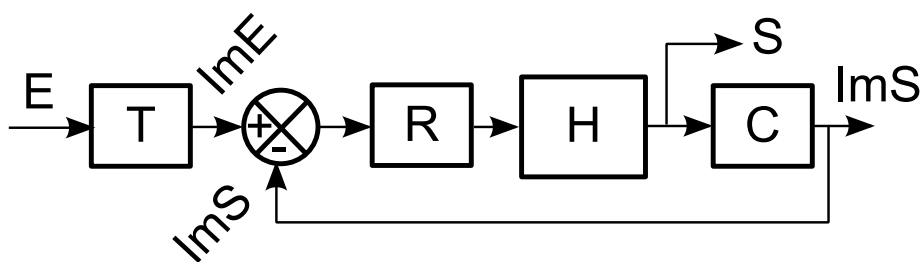
Si $T = C$:



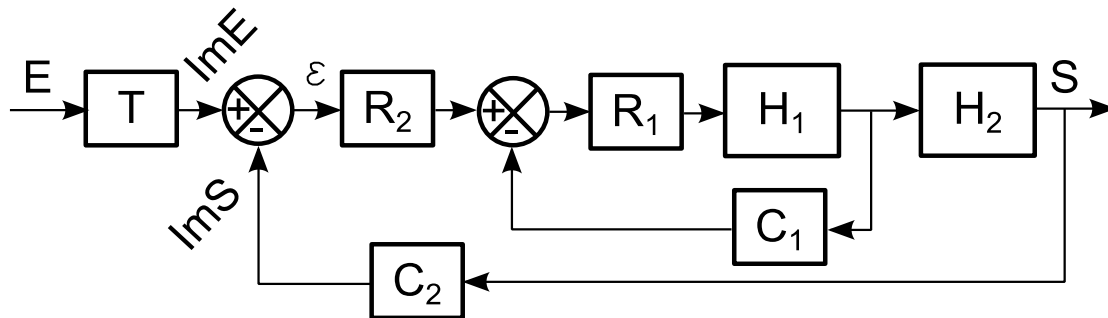
Attention à la nature des grandeurs d'entrée et de sortie même si on a la même FTBF !!

Remarque : Les ouvrages d'automatique traitent les problèmes en retour unitaire :

- d'une part parce que l'automaticien ne se préoccupe pas des flux de matière d'œuvre mais des images des grandeurs mesurant ces flux
- d'autre part parce que le système à retour unitaire suffit à décrire le système réel



Remarque : Lorsqu'un système comporte des boucles imbriquées, la condition de cohérence sur le transducteur n'a de sens pour la boucle externe : celle qui correspond à l'asservissement. Ici pour être cohérent, il suffit donc que le gain de $T(p)$ égale le gain $C_2(p)$. Si les deux blocs sont des gains purs : $T = C_2$.



Remarque : Si on doit régler les différentes boucles, on commencera par les boucles internes.

1.3 Fonction de transfert associée à un modèle – Formes canoniques et « zéros-pôles »

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K_0 \frac{(p - \xi_1) \dots (p - \xi_m)}{(p - p_1) \dots (p - p_n)} = \frac{K}{p^N} \times \frac{(1 + c_1 p + \dots)}{(1 + d_1 p + \dots)}$$

$$H(p) = \frac{K}{p^N} \times \frac{(1 + \tau_1 p) \dots (1 + \frac{2z_m}{\omega_{0m}} p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} p^2)}{(1 + T_1 p) \dots (1 + \frac{2z_n}{\omega_{0n}} p + \frac{1}{\omega_{0n}^2} p^2)}$$

- Les ξ_i sont les **zéros** et les p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert
- **K** est le **gain statique** de la fonction de transfert
- **N** est la **classe** de la fonction de transfert (nombre d'intégrateur purs)
- **n** est l'**ordre** de la fonction de transfert

Remarque : Equation caractéristique de cette fonction : **$D(p) = 0$**

2 Précision des systèmes asservis

2.1 Notion d'erreur

La notion d'erreur est délicate à manipuler : il est nécessaire de comparer deux grandeurs entrée et sortie réellement comparable, c'est-à-dire, la consigne et le résultat obtenu.

L'erreur est évaluée **en régime permanent** dans le cas d'une entrée définie.

On définit l'erreur : $Erreur = \lim_{t \rightarrow \infty} Erreur(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (E(t) - S(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - S(p))$

On définit l'écart : $Ecart = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(Im E(p) - Im S(p))$

Remarque : Avec les notations précédentes : $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p(T(p)E(p) - C(p)S(p))$

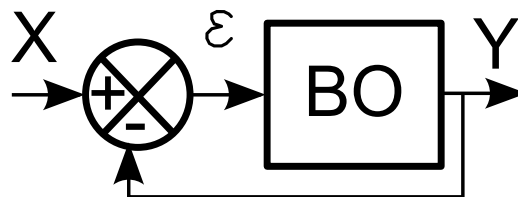
En supposant que le capteur et le transducteur ont le même gain statique K_{CT} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p(K_{CT}E(p) - K_{CT}S(p)) = K_{CT} \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - S(p))$$

L'écart permet de quantifier l'erreur : $Ecart = K_{CT} \times Erreur$

2.2 Le retour unitaire : une façon de faire apparaître la BO

On raisonnera à partir d'un schéma bloc mis sous la forme d'un retour unitaire : X et Y sont donc ici les images des grandeurs d'entrée E et de sortie S.



Cas général :

$$BO(p) = \frac{K}{p^N} \times \frac{(1+c_1p+\dots)}{(1+d_1p+\dots)}$$

$$\varepsilon(p) = X(p) \cdot \frac{1}{1+BO(p)}$$

car $\varepsilon(p) = X(p) - Y(p)$ et $Y(p) = BO(p) \cdot \varepsilon(p)$ d'où $\varepsilon(p) \cdot (1 + BO(p)) = X(p)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^N} \times \frac{(1+c_1p+\dots)}{(1+d_1p+\dots)}} = \lim_{p \rightarrow 0} X(p) \cdot \frac{p^{N+1}(1+d_1p+\dots)}{p^N(1+d_1p+\dots) + K(1+c_1p+\dots)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} X(p) \cdot \frac{p^{N+1}}{p^N + K}$$

Remarque : En supposant que le gain du capteur soit K_{CT} on aura donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Err(t) = \frac{1}{K_{CT}} \lim_{p \rightarrow 0} X(p) \frac{p^{N+1}}{p^N + K}$$

2.3 Détermination de l'erreur (ou écart) en BF grâce à la BO

Erreur de position ou erreur statique :

C'est l'erreur relative à une entrée en échelon : $X(t) = A \cdot u(t) \rightarrow X(p) = \frac{A}{p}$

Erreur de traînage ou erreur en vitesse :

C'est l'erreur relative à une entrée en rampe : $X(t) = A \cdot t \cdot u(t) \rightarrow X(p) = \frac{A}{p^2}$

Erreur dynamique ou erreur en accélération :

C'est l'erreur relativement à une entrée parabolique : $X(t) = \frac{A}{2} \cdot t^2 \cdot u(t) \rightarrow X(p) = \frac{A}{p^3}$

Quantification de l'écart et de l'écart relatif

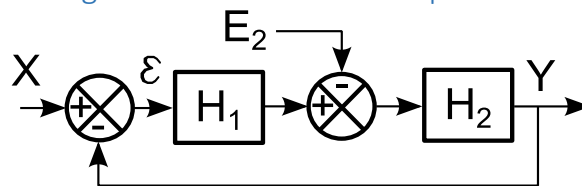
$$Ecart = \lim_{t \rightarrow \infty} (X(t) - Y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} X(p) \frac{p^{N+1}}{p^{N+K}}$$

On étudie la **CLASSE de la BOUCLE OUVERTE** pour calculer l'**erreur (ou l'écart) en BOUCLE FERMEE**.

X(p)	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
$\frac{A}{p}$	$\frac{A}{K_{BO} + 1}$	0	0	0
$\frac{A}{p^2}$	∞	$\frac{A}{K_{BO}}$	0	0
$\frac{A}{p^3}$	∞	∞	$\frac{A}{K_{BO}}$	0

Conclusion : La classe de la BO suffit à justifier la valeur de l'erreur.

2.4 Position de l'intégrateur : influence sur la précision



$$\text{avec } H_1(p) = \frac{K_1}{p^\alpha} \text{ et } H_2(p) = \frac{K_2}{p^\beta}$$

Perturbation constante (échelon) : $E_2(p) = \frac{E_2}{p}$

Ecart	Cas 1		Cas 2		Cas 3	
	$\alpha = 0$	$\beta = 0$	$\alpha = 0$	$\beta = 1$	$\alpha = 1$	$\beta = 0$
$\frac{X}{p}$	$X \frac{1}{1 + K_1 K_2} + E_2 \frac{K_2}{1 + K_1 K_2}$		$E_2 \frac{K_2}{K_1 K_2}$		0	
$\frac{X}{p^2}$	$\infty + E_2 \frac{K_2}{1 + K_1 K_2}$		$X \frac{1}{K_1 K_2} + E_2 \frac{K_2}{K_1 K_2}$		$X \frac{1}{K_1 K_2}$	

En pratique, cela revient à effectuer une superposition : on ajoute l'impact de la perturbation à l'écart calculé précédemment. Du point de vue de la perturbation, on retrouve au dénominateur une expression fonction du gain de la BO et au numérateur le seul gain de la fonction située après la perturbation.

2.5 Conclusions

- **L'écart est une caractéristique de la FTBF mais il peut être définie grâce à la FTBO.** L'écart donne l'erreur au gain du capteur près.
- Quelle que soit l'erreur, elle diminue quand le Gain Statique de la FTBO augmente.
- **UN INTEGRATEUR SITUE EN AMONT DE LA PERTURBATION DANS LA FTBO ANNULE L'ERREUR DUE A LA PERTURBATION EN ECHELON (CONSTANTE).** Si la perturbation est une rampe, il faudra deux intégrateurs, etc ...

Remarque : Si l'intégrateur est situé en aval de la perturbation, il ne l'élimine pas (cas classique des intégrations liées à un asservissement de position dans le cas d'un actionneur de type moteur CC).

3 Stabilité des systèmes

Les systèmes automatisés vieillissent : les liaisons prennent du jeu, les états de surface et les « élasticités des pièces » changent faisant varier le coefficient d'amortissement, bref, un système réglé lors de sa réalisation peut ne plus respecter le cahier des charges imposé après un certain temps de fonctionnement : il peut devenir instable. Il est donc nécessaire de savoir, lorsqu'un système est stable, s'il est très stable, très très stable, ou au bord de l'instabilité : on peut évoquer une marge de stabilité.

La définition de la stabilité rappelée précédemment est donc insuffisante pour régler les systèmes automatisés. Il est nécessaire de disposer de critères permettant :

- de déterminer précisément si un système est stable ou non,
- de quantifier la « marge » de stabilité dont on dispose s'il est stable,
- de déterminer les réglages permettant de rendre le système stable avec une certaine marge.

3.1 Stabilité « absolue » : CRITERE SUR LA BF

3.1.1 Etude de la réponse à un Dirac : calcul des pôles.

Définition : La stabilité peut être évaluée à partir de la réponse à un Dirac : si la réponse converge vers zéro, le système est stable.

Autre définition : Si la réponse à une consigne finie (échelon) converge vers une valeur finie, le système est stable.

Remarque : Sachant que la transformée d'un Dirac est 1, la réponse temporelle à un Dirac est $s(t) = \mathcal{L}^{-1}[1.H(p)]$, c'est-à-dire la transformée inverse de la fonction de transfert $H(p)$.

On s'intéresse donc directement à la fonction de transfert pour rechercher des critères permettant d'évaluer la stabilité absolue.

A partir du calcul des racines du dénominateur (pôles) on peut décomposer toute fraction rationnelle en éléments simples.

Remarque : Nous n'étudierons ici que le cas des racines simples, la démarche est voisine pour les racines multiples.

$$H(p) = \sum_i \frac{A_i}{p-p_i} \quad \text{où } p_i \text{ est un pôle de } H(p) \quad \text{et} \quad p_i = \sigma + j\omega ; A_i = \rho e^{j\varphi}$$

En additionnant la réponse de chaque élément simple, on obtient la réponse totale.

1^{er} cas : p_i réel

$$L^{-1}\left(\frac{A_i}{p-p_i}\right) = A_i e^{p_i t} u(t)$$

→ La réponse « converge » vers 0 si $p_i = \sigma < 0$.

→ Si $p_i = 0$ (classe 1) la réponse à un Dirac est une constante différente de 0, le système diverge.

2^e cas : p_i complexe

\bar{p}_i figure forcément dans la décomposition, on cherche donc la réponse de la somme :

$$L^{-1}\left(\frac{A_i}{p-p_i} + \frac{\bar{A}_i}{p-\bar{p}_i}\right) = L^{-1}\left(\frac{2a(p-\sigma)-2b\omega}{(p-\sigma)^2+\omega^2}\right) = e^{\sigma t}(2a \cos(\omega t) - 2b \sin(\omega t)). u(t)$$

Avec $p_i = \sigma + j\omega$ et $A_i = a + bj$

→ Si $\sigma > 0$, la réponse diverge.

→ Si $\sigma = 0$, la réponse est une sinusoïde pure : donc instable.

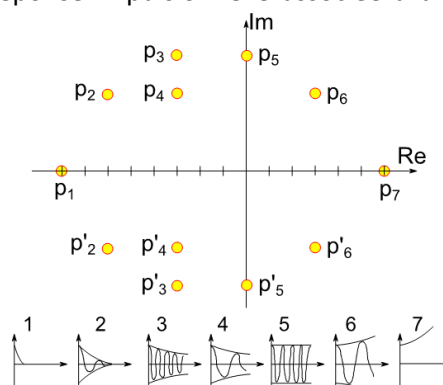
→ Si $\sigma < 0$, la réponse « converge ». Plus $|\sigma|$ est grande, plus la convergence est rapide.

Le rôle de p_i est d'autant moins important que $|\sigma|$ est grand.

Plus $|\sigma|$ est petit, plus le pôle correspondant est dominant.

CONCLUSIONS :

- **POUR QU'UN SYSTEME SOIT STABLE, LES PARTIES REELLES DES POLES DE SA FONCTION DE TRANSFERT DOIVENT TOUTES ETRE STRICTEMENT NEGATIVES.**
- **L'INFLUENCE D'UN POLE EST INVERSEMENT PROPORTIONNELLE A LA VALEUR ABSOLUE DE SA PARTIE REELLE. LE POLE DOMINANT EST DONC CELUI QUI A LA PLUS PETITE PARTIE REELLE (CELUI QUI DONNE LA PLUS GRANDE CONSTANTE DE TEMPS).** Si on veut simplifier une fonction de transfert ayant de nombreux pôles, on considère que la réponse est assimilable à celle(s) des élément(s) associés au(x) pôle(s) dominant(s).
- Carte des pôles : tracé de la réponse impulsionnelle associée à un pôle réel ou à un pôle complexe et son conjugué.



3.1.2 Stabilité absolue : étude des pôles

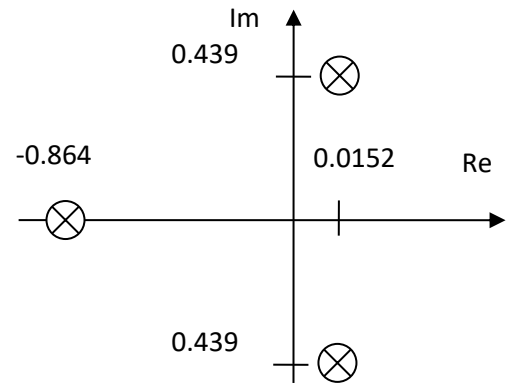
Soit la fonction de transfert en BF : $H(p) = \frac{1}{1+p+5p^2+6p^3}$

Après calcul (et arrondi) :

$$P1 = -0.8637$$

$$P2 = 0.0152 + 0.439j$$

$$P3 = 0.0152 - 0.439j$$



Ce qui donne pour la décomposition :

$$H(p) = \frac{1/6}{(p + 0.864)(p - 0.0152 - 0.439j)(p - 0.0152 + 0.439j)}$$

$$H(p) = \frac{0.1667}{(p + 0.864)((p - 0.0152)^2 + 0.439)} = \frac{A}{p + 0.864} + \frac{B + Cp}{(p - 0.0152)^2 + 0.439}$$

Calcul de A, B et C (D.E.S.) :

Ce qui donne : A = -0.173 ; B = -0.154 ; C = 0.173

On a donc, après mise en forme :

$$H(p) = \frac{-0.173}{p + 0.864} + \frac{-0.154 + 0.173p}{(p - 0.0152)^2 + 0.439}$$

Et après adaptation au tableau de Laplace :

$$H(p) = -0.173 \frac{1}{p + 0.864} + 0.173 \frac{p - 0.0152}{(p - 0.0152)^2 + 0.439} - 1.99 \frac{0.439}{(p - 0.0152)^2 + 0.439}$$

On recherche à présent la réponse à un Dirac de H(p). La transformée de Laplace d'un Dirac étant 1, cela revient à chercher la transformée inverse de H(p).

D'après le tableau de Laplace et à l'échelon de Heaviside près :

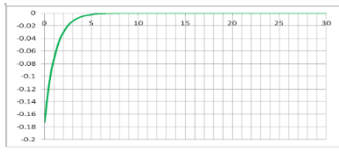
$$L^{-1}\left(\frac{1}{p + \alpha}\right) = e^{-\alpha t} ; L^{-1}\left(\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}\right) = e^{-\alpha t} \cos(\omega t) ; L^{-1}\left(\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}\right) = e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

On a donc :

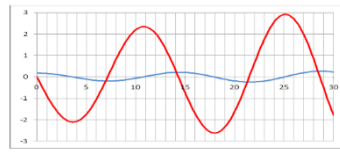
$$L^{-1}(H(p)) = -0.173e^{-0.864t} + 0.173e^{-0.0152t} \cos(0.439t) - 1.99e^{0.0152t} \sin(0.439t)$$

On retrouve donc bien la réponse décomposée sous la forme d'un sinus et d'un cosinus.

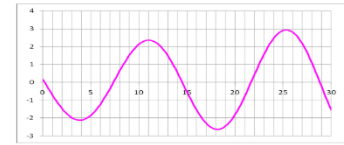
3.1.3 Tracé des réponses impulsionnelles



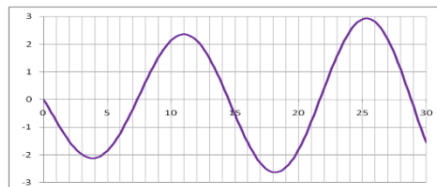
Réponse associée au pôle réel



Réponse décomposée associée aux pôles complexes

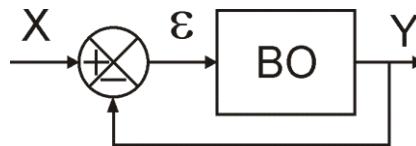


Réponse globale associée aux pôles complexes



Réponse totale

3.2 Stabilité absolue et relative : CRITERES SUR LA BO



Dans tout ce qui suit, le système étudié est préalablement transformé de façon à faire apparaître un **retour unitaire**. Le plus simplement, on choisit en entrée l'image de la consigne et en sortie l'image de la sortie.

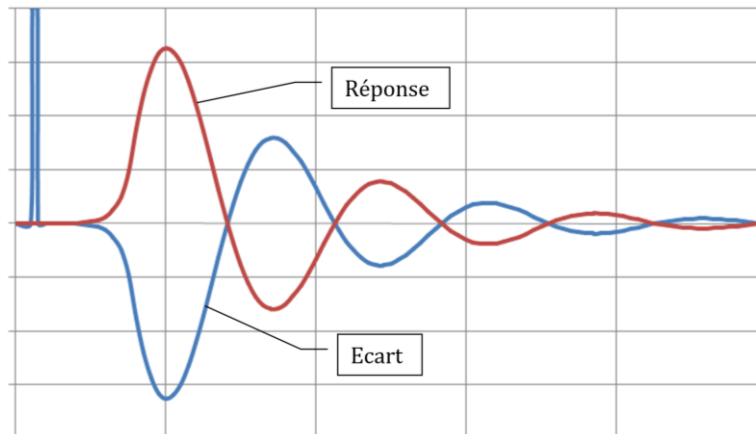
3.2.1 Exemple

Nous raisonnerons ici sur un exemple afin de revoir le lien entre la réponse fréquentielle et la réponse temporelle.

$$BO(p) = \frac{50}{1 + 0.1p + 0.001p^2}$$

Remarque : Le fait que la BF soit un second ordre sous amorti ne change rien au raisonnement, cela permet simplement de mieux visualiser certains phénomènes.

Réponse temporelle pour une entrée Dirac



Analyse des réponses

- 1) Le signal d'écart, et la réponse sont évidemment de même nature (même pseudo-période) : **quelle que soit la sortie que l'on choisit d'extraire du schéma bloc, le dénominateur de la fonction de transfert en BF entre la consigne et la sortie choisie est le même.** Il est donc normal que la sortie Ecart soit la réponse impulsionnelle d'un second ordre sous amorti, au même titre que la sortie réelle.
- 2) Le signal qui entre dans la BO est l'écart, c'est-à-dire l'entrée de la BF moins la sortie. L'entrée de la BF étant une constante (ici nulle dès que $t = 0^+$), l'écart est égal à la sortie à une constante et un signe près (ici égal à la sortie au signe près). Donc **la sortie de la BO est en opposition de phase avec son entrée** (sortie déphasée de 180° par rapport à l'écart).
- 3) On sait que le gain d'un système varie en fonction de la pulsation du signal d'entrée. Or, on voit ici que, par construction, on sollicite la BO à la pulsation correspondant à un déphasage de 180° noté ici ω_{-180} .

Si on veut que la sortie converge, il est donc nécessaire que le gain de la BO à la pulsation ω_{-180} soit inférieur à 1.

Si le gain de la BO à la pulsation ω_{-180} est supérieur à 1, la sortie aura une amplitude supérieure à l'entrée. Or comme cette sortie est réinjectée à l'entrée, cela signifie que l'entrée a de plus en plus d'amplitude, par voie de conséquence la sortie aussi. Et le système diverge.

Remarque : Le raisonnement aurait été le même avec une entrée en échelon, l'écart étant simplement décalé d'une constante par à la sortie.

3.2.2 Enoncé du critère sur la BO (Critère du REVERS).

La BO doit être stable ne pas comporter de pôles à partie réelle strictement positive.

Le système est stable en BF si $|BO(j\omega)| < 1$ quand $\text{Arg}(BO(j\omega)) = -180^\circ$.

Notons ω_{-180} la pulsation à laquelle $\text{Arg}(BO(j\omega)) = -180^\circ$. Si $|BO(j\omega_{-180})| < 1$ on dit que le système a de la marge de gain (MG) : **on peut multiplier le gain par $1/|BO(j\omega_{-180})|$ avant que le système devienne instable.**

Système stable \Leftrightarrow MG > 0 avec $MG = -20 \log |BO(j\omega_{-180})|$

La pulsation critique ω_c est telle que $|BO(j\omega_c)| = 1$. Si $\text{Arg}(BO(j\omega_c)) > -180^\circ$ on dit que le système a de la marge de phase ($M\phi$) : **on peut ajouter $M\phi$ au déphasage sans que le système ne devienne instable.**

Système stable \Leftrightarrow Si $M\phi > 0$ avec $M\phi = 180 + \text{Arg}(BO(j\omega_c))$

Un système pour lequel $\omega_c = \omega_{-180}$ est à la limite de l'instabilité.

L'étude des lieux de la fonction de transfert en BOUCLE OUVERTE d'un système permet donc d'étudier la stabilité du système en BOUCLE FERMEE.

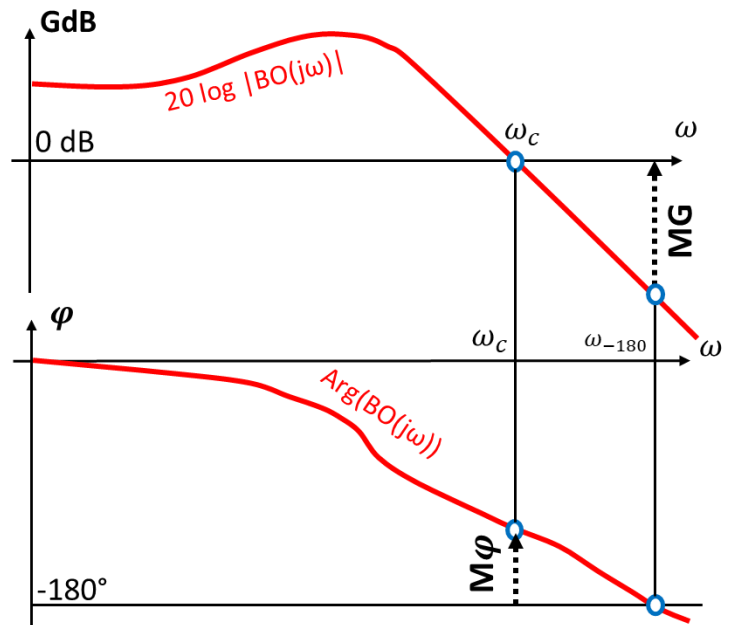
3.2.3 Stabilité d'un système avec le diagramme de Bode

Le tracé est celui de la BO.

Les marges de stabilité apparaissent directement.

Sur le diagramme de gain, la pulsation critique ω_c est définie par : $\text{GdB}(\omega_c) = 0$.

Sur le diagramme de phase, on définit ω_{-180} en recherchant $\varphi(\omega) = -180^\circ$.



Remarque : Le système est stable si : $\text{GdB}(\omega_{-180}) < 0$. On définit ainsi graphiquement la marge de gain MG. Tant que le gain de la BO au voisinage de ω_{-180} , n'augmente pas de plus que la marge, le système reste stable.

3.2.4 La nécessité des marges

Ces marges autorisent des variations autour du point de réglage initial du système sans que celui-ci devienne instable. Ces variations sont inhérentes au vieillissement du système (augmentation des jeux, variation de la raideur, etc ...) ou à des dérèglements accidentels. Elles correspondent à des coefficients de sécurité.

Les valeurs suivantes sont celles que l'on admet le plus souvent pour définir une bonne marge de stabilité.

Marge de phase = 45° (mesurée à la pulsation critique : GdB = 0)

Marge de gain = 6 dB à 12 dB

Remarque : Dans les sujets, il faudra se reporter aux valeurs des Marges de Gain et de Phase **données dans le CdCF.**

La marge de phase de 45° pour la BO correspond à peu près à :

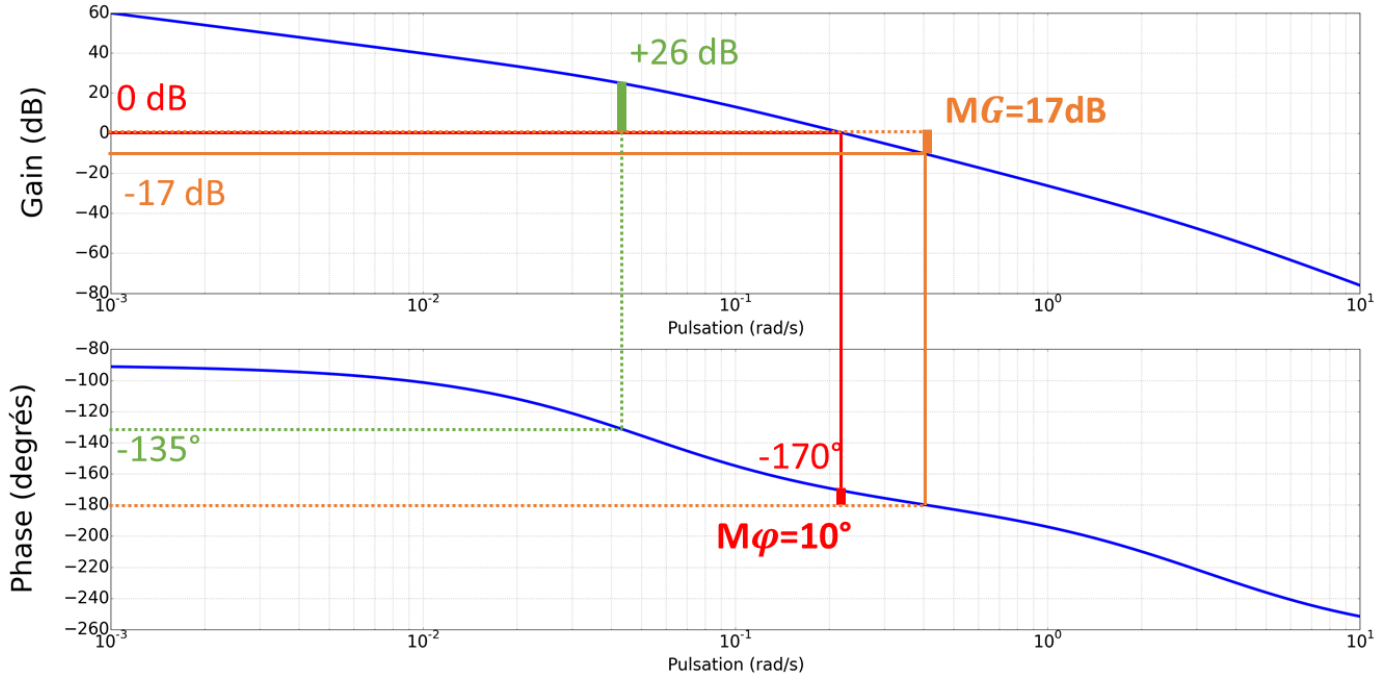
- un dépassement de 20 % pour la réponse indicielle en BF
- une résonance de 2.3 dB pour la réponse fréquentielle en BF

3.2.5 Exemple

$$BF = \frac{1}{1 + p + 20p^2 + 6p^3} = \frac{BO}{1 + BO} \leftrightarrow BO(p) = \frac{1}{p(1 + 20p + 6p^2)}$$

Le CdCF donne les valeurs suivantes : Marge de Gain : 6 dB et Marge de Phase : 45°.

On donne ci-dessous le tracé des diagrammes de Bode de la BO :



Détermination de la marge de Gain :

A la pulsation 0.4 rad/s pour laquelle $\varphi = -180^\circ$, $G_{dB} = 17$ dB \rightarrow $MG > 6$ dB \rightarrow CdCF OK

Détermination de la marge de Phase :

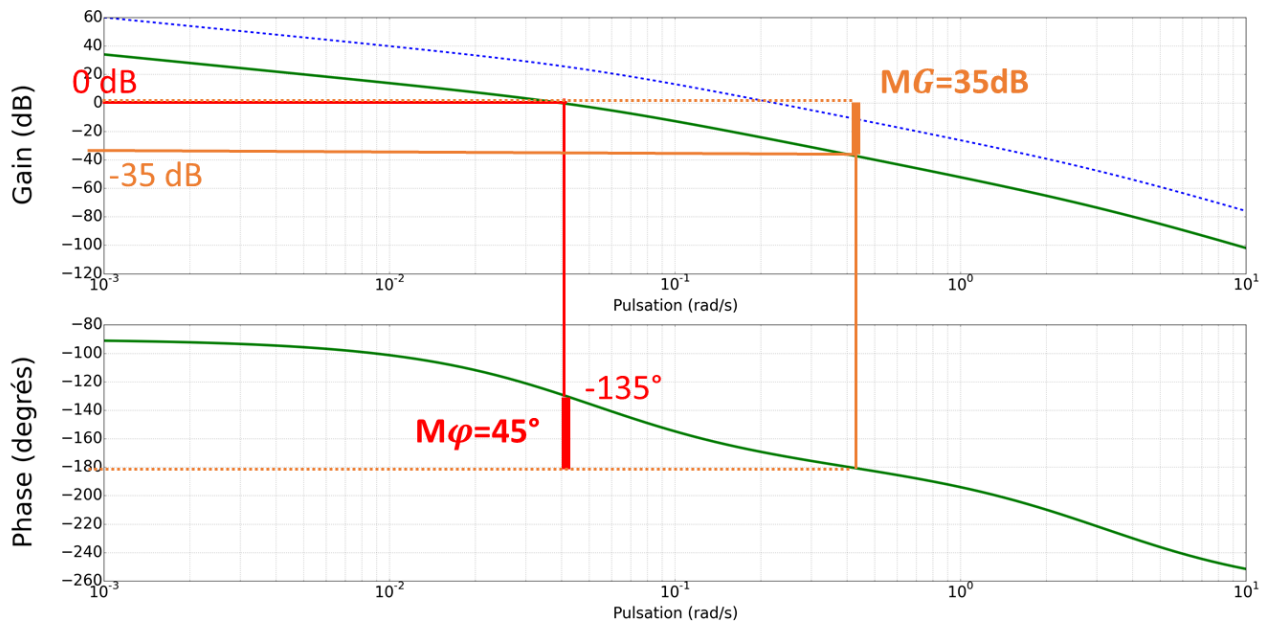
A la pulsation critique 0.22 rad/s, la phase vaut $-170^\circ \rightarrow M\phi = 10^\circ < 45^\circ \rightarrow$ CdCF ∇

« Modification » de la BO pour répondre au CdCF :

Pour avoir une marge de phase de 45°, on recherche la pulsation pour laquelle la phase vaut -135° c'est-à-dire 0.045 rad/s.

A cette pulsation le gain vaut +26 dB. Il faut donc abaisser le gain de 26 dB pour que cette pulsation devienne la pulsation critique du système corrigé. Ce qui signifie multiplier le gain de la BO par un facteur 0,05 ($20\log(K) = -26$ dB $\rightarrow K = 10^{\frac{-26}{20}} \approx 0,05$).

On obtient ainsi les nouveaux diagrammes de Bode :



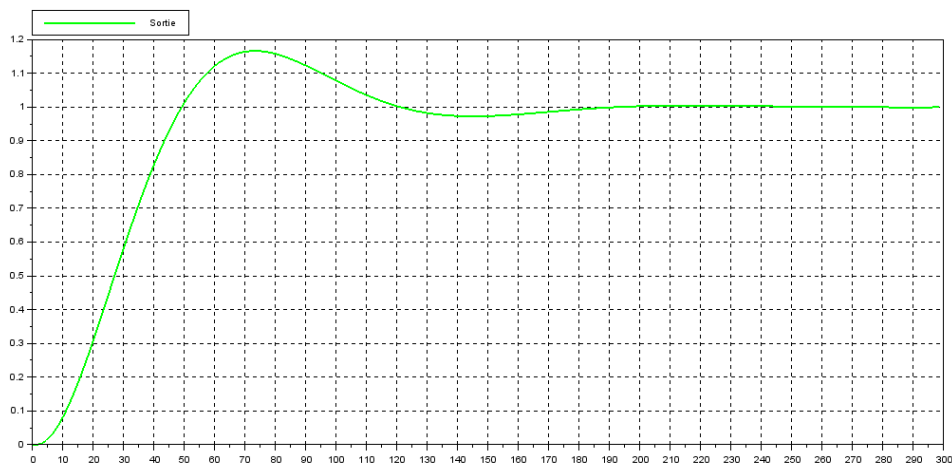
Détermination de la marge de Gain :

→ MG 35 dB > 6 dB → CdCF OK

Détermination de la marge de Phase :

→ $M_\phi = 45^\circ \leq 45^\circ$ → CdCF OK

Ci-dessous, le tracé de la réponse indicielle en BF :



Remarque : Ici, $D_{1\%} = 23\%$.

4 Conclusions sur précision et stabilité

4.1 Influence de la classe et du gain sur la précision, la rapidité et la stabilité :

Impact du gain et de la classe de la BO sur les performances en BF

	ω_c	MG	M ϕ	Erreur
K _{BO} ↗	↗	↘	↘	↘
Classe ↗	↘	↘	↘	↘

L'augmentation du Gain rend le système plus précis, plus rapide et plus instable.
L'augmentation de la Classe rend le système plus précis, plus lent et plus instable.

4.2 Evaluation de la stabilité :

- 1) Par la recherche des pôles de la BF.
- 2) Par l'évaluation de la **marge de gain** et de la **marge de phase** de la **BO**.

Remarque : La fonction de transfert en BF caractérisant la sortie en fonction de la perturbation a le même dénominateur que celle caractérisant la sortie en fonction de la consigne. L'évaluation de la stabilité par rapport à la consigne est donc suffisante. De plus, la BO est la même que l'on considère l'entrée ou la perturbation.

4.3 Evaluation de la précision :

- 1) Par un critère absolu en comparant $S(t)$ et $E(t)$: $\{\lim_{t \rightarrow \infty} [E(t) - S(t)]\}$ ou en comparant l'image de la consigne avec l'image de la sortie. On travaille alors avec la fonction de transfert en **BF**, en utilisant le **théorème de la valeur finale avec la BF** ou en calculant purement et simplement la réponse temporelle.
- 2) Par le biais du tableau en recherchant la classe de la fonction de transfert en **BO**.
- 3) **L'intégrateur doit être placé avant une perturbation en échelon pour éliminer son influence dans l'erreur statique.**

5 Le retard

Un retard peut rendre instable n'importe quel système !

5.1 Introduction explicative

Les causes des retards sont multiples : **frottements, jeux, effort résistant ...**

Au départ l'arbre moteur ne tourne pas. On applique une tension.

Le moteur ne tourne pas tant que $C_m = K_c i < C_{frot1}$.

Seule l'équation électrique intervient : $U(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$. Cela traduit la montée du courant comme un premier ordre de constante L/R jusqu'à la valeur critique de $i(t)$. Il est donc tout à fait possible de chiffrer le temps mis pour atteindre cette valeur seuil.

La valeur critique est atteinte. L'arbre moteur seul tourne et on a le comportement habituel d'un moteur soumis à une perturbation, avec un retard. L'arbre moteur tourne seul jusqu'à ce que le $\Delta\theta$ correspondant au jeu soit parcouru.

5.2 Etude de ce retard

La réponse du moteur est donc assimilable à un premier ordre avec retard :

$$H(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{1 + T p}$$

La réponse fréquentielle en BO sera la superposition de :

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + T p} \text{ et } H_2(p) = e^{-\tau p}$$

Il suffit donc de calculer le gain et la phase de $H_2(p)$: $GdB = 20 \log |e^{-j\tau\omega}|$ et $\phi = \text{Arg}(e^{-j\tau\omega})$

On obtient : **$GdB = 0$ et $\phi = -\tau\omega$**

Le retard ne modifie donc pas le gain de l'ensemble mais il ajoute un déphasage croissant linéairement avec la pulsation. Donc mon système du 1^{er} ordre qui est stable, devient instable avec un retard !

En conclusion : Un retard, même petit, peut devenir une source d'instabilité : tout dépend de la fréquence à laquelle on fait travailler le système. Et des retards, il y en a forcément dans un système assorti d'une partie opérative « mécanique ».

Cas où $T = 10 \tau$

La figure ci-dessous (gain à gauche, phase à droite) montre qu'il est possible d'être instable avec un premier ordre retardé.

