

Réponses Fréquentielles

Compétences attendues :

- ✓ Etablir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle. $\Leftrightarrow I$
- ✓ Déterminer la réponse fréquentielle. $\Leftrightarrow I$
- ✓ Simplifier un modèle.
- ✓ Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- ✓ Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
- ✓ Déterminer les performances d'un système asservi.
- ✓ Analyser un algorithme. $\Leftrightarrow I$

1. Notion d'analyse fréquentielle

1.1. Pourquoi cette leçon ?

Nous avons déjà vu, dans le chapitre précédent, les réponses temporelles aux signaux d'entrée usuels que sont le Dirac, l'échelon et la rampe. Pourtant, l'entrée d'un système est rarement un signal aussi simple... La théorie de Fourier pallie en partie ce problème.

Mais pour rester dans un domaine où les calculs sont réalisables, il faut néanmoins se limiter à cette palette de signaux.

1.2. Eléments de la théorie de Fourier

La théorie développée par Fourier (1768-1837) met en avant le fait que **tout signal continu périodique peut s'écrire comme la somme de signaux sinusoïdaux d'amplitudes et de fréquences différentes.**

Exemple : le signal créneau

Il est possible d'approximer un signal créneau par une somme de fonctions cosinus, d'amplitudes et de fréquences différentes. Cette décomposition s'écrit :

$$f(t) = \cos(\omega t) - \frac{\cos(3\omega t)}{3} + \frac{\cos(5\omega t)}{5} - \frac{\cos(7\omega t)}{7} + \frac{\cos(9\omega t)}{9} + \dots$$

Où $f(t)$ est la fonction approchante et ω la pulsation du signal ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec T la période du créneau).

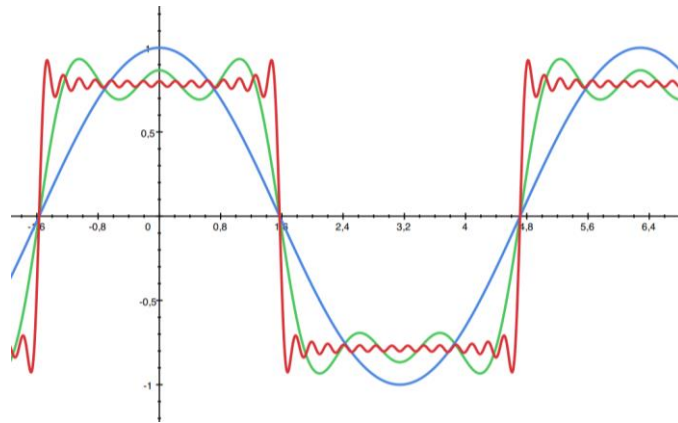


Figure 1 : Signal créneau approché par une somme de cosinus (1, 3 et 15 termes)

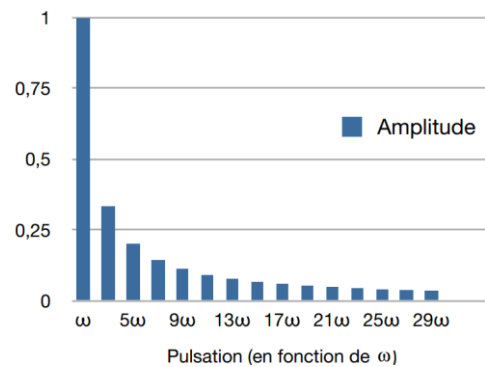


Figure 2 : Diagramme représentant les amplitudes et les fréquences composant un créneau approché par 15 termes

Ainsi, chaque signal s'écrit comme une somme de signaux sinusoïdaux pourra être repéré par un ensemble d'amplitudes et de fréquences correspondantes. Par exemple, un signal créneau de 15 termes sinusoïdaux peut être représenté sous forme de diagramme (cf. figure 1 & 2).

1.3. Objectif de cette leçon

Les systèmes étudiés étant linéaires, la réponse d'un système à un signal périodique se déduit de l'ensemble de ses réponses à des signaux sinusoïdaux répartis dans une plage de fréquence adaptée.

Il est donc indispensable, au regard de la problématique évoquée dans le premier paragraphe, d'effectuer une étude fréquentielle (ou étude harmonique) qui caractérise les réponses du système en fonction des fréquences du signal d'entrée.

L'objectif de ce cours est la **caractérisation des performances d'un système dans le domaine fréquentiel**. On étudiera ainsi la réponse de systèmes à une entrée sinusoïdale simple de type $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$, le résultat se transposant à n'importe quelles amplitude e_0 et pulsation ω .

Dans les chapitres précédents, nous avons montré qu'un système linéaire (SLCI) pouvait être modélisé par un système d'équations différentielles. La résolution de ces équations a été facilitée par l'utilisation de la transformée de Laplace, qui permet de travailler, dans le domaine de Laplace, avec des fractions polynomiales liant l'entrée et la sortie de chaque système : les fonctions de transfert.

L'intérêt est de caractériser les performances des SLCI pour les critères de précision, rapidité, amortissement et stabilité, afin de les comparer ou les adapter au cahier des charges. Dans le domaine de Laplace, chaque élément d'un système étant représentable par sa fonction de transfert, **étudier un système et ses performances revient à étudier sa fonction de transfert**. C'est donc à travers la fonction de transfert des systèmes que nous mènerons les études fréquentielles.

1.4. Exemples d'application

Les applications des études fréquentielles sont nombreuses et variées, et ce dans des domaines très différents. On peut citer notamment :

- les vibrations et résonances dans les systèmes mécaniques (aéronautique, systèmes d'amortissement) ;
- la propagation des ondes sonores (instruments de musique, systèmes de réduction ou d'amplification du bruit) ;
- la propagation de la chaleur, du rayonnement...

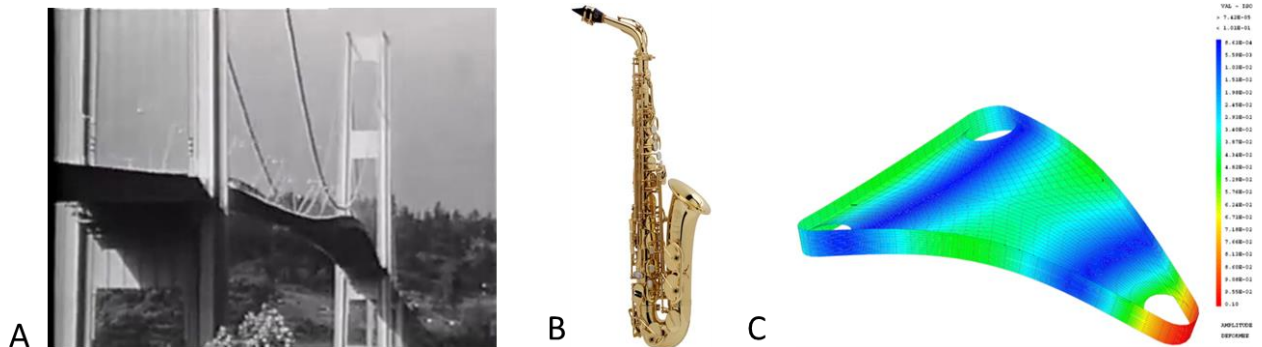


Figure 3 : A. Vibration mécanique (pont de Tacoma). B. Ondes sonores (saxophone). C. Vibrations d'un triangle en composite (simulation)

2. Réponse d'un système à une entrée sinusoïdale

2.1. Système du premier ordre

On s'intéresse dans un premier temps aux systèmes du premier ordre. Ils sont régis par l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Soit

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

On soumet un tel système à une entrée sinusoïdale : $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$. On cherche alors à déterminer la réponse temporelle. Dans le domaine de Laplace :

$$E(p) = e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Soit

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \frac{e_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Pour déterminer $s(t)$, on décompose donc $S(p)$ en éléments simples :

$$S(p) = \frac{A}{1 + \tau p} + \frac{Bp + c}{p^2 + \omega^2} = \frac{Ke_0}{\tau^2 \omega^2 + 1} \left[\frac{\tau^2}{1 + \tau p} + \frac{1 - \tau p}{p^2 + \omega^2} \right]$$

On en déduit d'après le tableau des transformées :

$$s(t) = \frac{Ke_0}{\tau^2 \omega^2 + 1} \left(\tau \omega e^{-\frac{t}{\tau}} + \sin(\omega t) - \tau \cos(\omega t) \right) u(t)$$

En posant alors

$$\sin(\varphi) = -\frac{\tau \omega}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \text{ et } \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}$$

On obtient :

$$s(t) = \left[\frac{Ke_0 \tau \omega}{\tau^2 \omega^2 + 1} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Ke_0}{\tau^2 \omega^2 + 1} \sin(\omega t + \varphi) \right] u(t)$$

La solution s'écrit sous la forme d'une somme entre une exponentielle amortie (régime transitoire) et un sinus (régime permanent). En régime permanent, la réponse à une sollicitation sinusoïdale ($e(t)$) est donc sinusoïdale, d'amplitude différente et déphasée par rapport à $e(t)$.

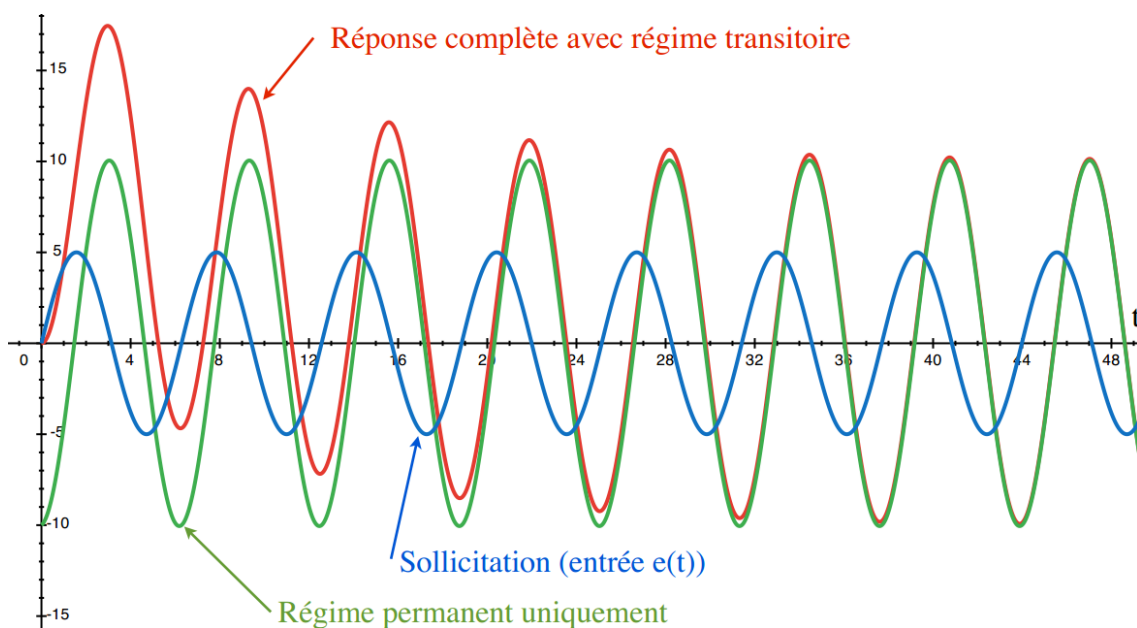
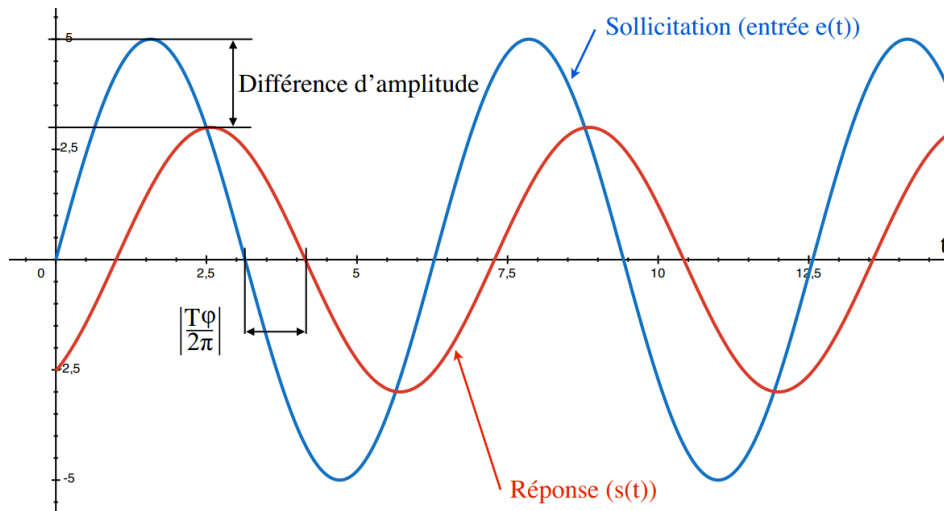


Figure 4 : Réponse temporelle d'un système d'ordre 1 soumis à une entrée sinusoïdale

2.2. Généralisation

On soumet un SLCI (système linéaire continu invariant) à une entrée sinusoïdale de pulsation ω ($\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$) : $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$.

On peut montrer que la réponse, **en régime permanent** est $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$: elle possède la même fréquence ω que l'entrée mais admet un déphasage φ . Les réponses pour différentes valeurs de ω sont dites fréquentielles ou harmoniques.



$e(t)$ et $s(t)$ vérifient l'équation différentielle générale du système. On cherche la solution de cette équation différentielle en prenant pour $e(t)$ et $s(t)$ une forme sinusoïdale.

Pour faciliter les calculs, on utilise la notation complexe :

$$\underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t} \text{ et } \underline{s}(t) = s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Ainsi, $e(t)$ et $s(t)$ représentent les parties imaginaires de $\underline{e}(t)$ et $\underline{s}(t)$.

En injectant ces formes complexes dans l'équation différentielle générale :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

On a alors :

$$(a_n (j\omega)^n + \dots + a_0) s(t) = (b_m (j\omega)^m + \dots + b_0) e(t)$$

D'où

$$\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0} = \underline{H}(j\omega) = \frac{s_0}{e_0} e^{j\varphi}$$

Définition : On appelle $\underline{H}(j\omega)$ la **fonction de transfert harmonique du système**, avec :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s(t)}{e(t)}$$

$\underline{H}(j\omega)$ est donc un nombre complexe, dépendant de ω . On note :

- $G(\omega)$ son module, appelé gain : $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{s_0}{e_0}$
- $\varphi(\omega)$ son argument, appelé déphasage : $\varphi(\omega) = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$

Remarque importante : L'expression de $\underline{H}(j\omega)$ est **identique** à celle de $\mathbf{H}(p)$ pour un système donné si l'on échange p et $j\omega$.

Attention : Dans la suite du cours, afin d'alléger les notations, $\underline{H}(j\omega)$ sera noté $\mathbf{H}(j\omega)$.

3. Outils de représentation

Afin de faciliter l'étude des fonctions de transfert dans le domaine fréquentiel, on utilise les diagrammes de Bode, Black et Nyquist pour représenter graphiquement le module $G(\omega)$ et l'argument $\varphi(\omega)$.

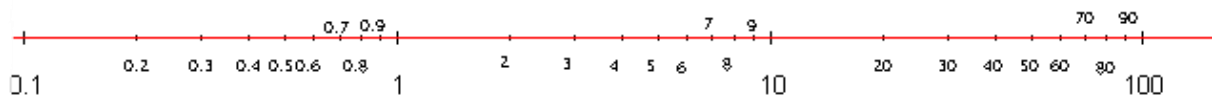
3.1. Les grandeurs

L'amplitude des variations de $\underline{H}(j\omega)$ étant extrêmement élevée, on utilise, en plus des deux grandeurs définies précédemment, le **gain en décibel**, noté G_{dB} , et défini par :

$$G_{dB}(\mathbf{H}(j\omega)) = 20 \log(|\mathbf{H}(j\omega)|)$$

3.2. Les échelles

On s'intéresse, en analyse fréquentielle, au comportement des systèmes sur toute une gamme de fréquences variant de quelques Hz à plusieurs milliers de Hz. Une échelle linéaire est alors inadaptée. C'est pourquoi on utilise des **échelles logarithmiques** (en logarithme décimal, noté \log) pour graduer les axes de ces courbes.



La distance qui sépare 1 de 10 est alors la même que celle qui sépare 10 de 100 et celle qui sépare 0,1 de 1. En effet : $\log(100) - \log(10) = \log(10) - \log(1) = \log(1) - \log(0,1)$.

On définit ainsi la **décade**, qui est la distance entre deux pulsation ω_1 et ω_2 telle que $\omega_1 = 10 \omega_2$.

De même, la distance qui sépare 1 de 2 est égale à celle qui sépare 10 de 20 mais est supérieure à celle qui sépare 2 de 3 car $\log(2) - \log(1) = \log(20) - \log(10) = \log(4) - \log(2) > \log(3) - \log(2)$.

Remarque : Pour l'échelle linéaire, deux graduations dont la différence vaut 10 sont à distance constante. Pour l'échelle logarithmique, deux graduations dont le rapport vaut 10 sont à distance constante.

Rappels mathématiques :

$$\log_{10}(A) = \frac{\ln(A)}{\ln(10)}, \quad \log(1) = 0, \quad \log(10) = 1, \quad \log(10^n) = n$$

La fonction \log est définie sur $]0 ; +\infty[$ et est strictement croissante, avec $\log(]0 ; +\infty[) = \mathbb{R}$.

4. Diagrammes de Bode

C'est la représentation la plus utilisée industriellement pour représenter le comportement fréquentiel des constituants.

Au nombre de **deux**, ces diagrammes représentent, respectivement, les variations :

- **du gain en décibel G_{dB}** (diagramme de module ou diagramme du gain, exprimé en décibel),
- **de la phase $\varphi(\omega)$** en degré ou radian (diagramme de phase),

en fonction de la pulsation ω (en rad/s) tracée sur une échelle logarithmique.

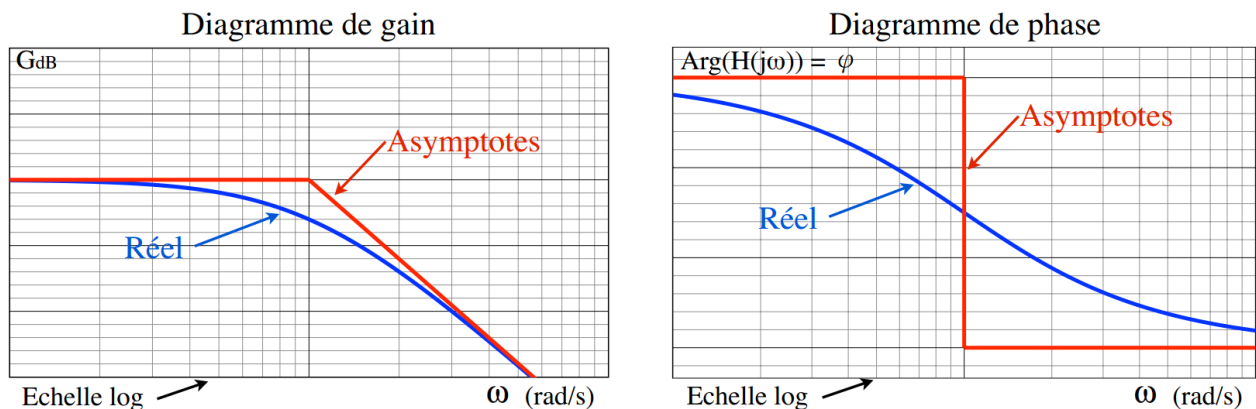


Figure 5 : Exemples de diagrammes de Bode

Remarque : On se contente dans la majorité des cas d'un **tracé asymptotique**. Plus clair, il permet d'apprécier globalement le comportement du système modélisé à 10% ou 20% près. Compte tenu des imprécisions sur les valeurs réelles des paramètres du modèle, une telle précision s'avère souvent suffisante.

Attention : Le tracé ne s'arrête pas aux bords de la fenêtre séquentielle dessinée, il commence à $\omega \rightarrow 0$ pour finir à $\omega \rightarrow \infty$

4.1. Propriété

Propriété : Si une fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$ est le produit de deux fonctions de transfert harmoniques $F(j\omega)$ et $G(j\omega)$, le tracé graphique de $H(j\omega)$ se déduit aisément par addition des graphes représentant respectivement $F(j\omega)$ et $G(j\omega)$.

Cette propriété est vérifiée pour le diagramme de gain comme pour le diagramme de phase.

Démonstration :

$$G_{dB}(H(j\omega)) = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(|F(j\omega)G(j\omega)|)$$

$$G_{dB}(H(j\omega)) = 20[\log(|F(j\omega)|) + \log(|G(j\omega)|)]$$

$$G_{dB}(H(j\omega)) = G_{dB}(F(j\omega)) + G_{dB}(G(j\omega))$$

Et

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(F(j\omega)G(j\omega)) = \text{Arg}(F(j\omega)) + \text{Arg}(G(j\omega))$$

4.2. Réponses harmoniques de systèmes simples

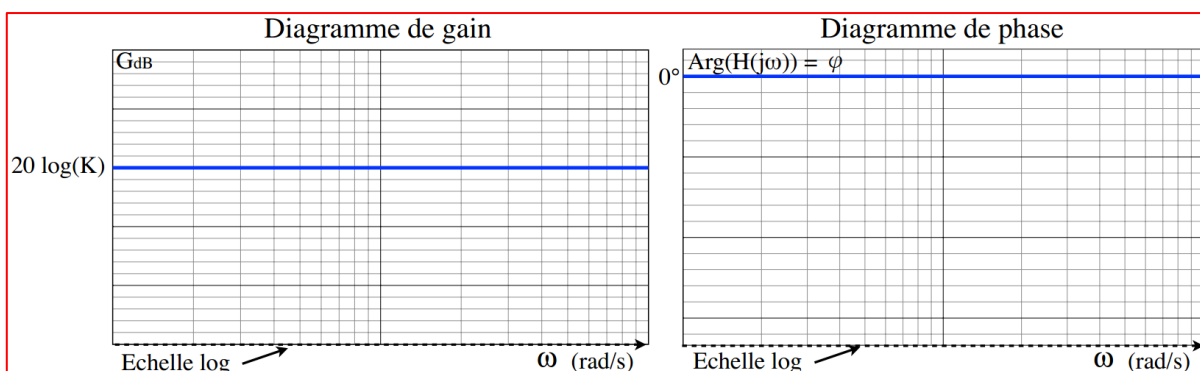
4.2.1. Systèmes à action proportionnelle

La fonction de transfert harmonique d'un système à action proportionnelle ($s(t) = Ke(t)$, avec $K > 0$) s'écrit : $H(j\omega) = K$.

On a alors :

- $G_{dB}(H(j\omega)) = 20 \log(K)$
- $\text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(K) = 0$ car $K \in \mathbb{R}^{+*}$

Les diagrammes de Bode sont donc :



4.2.2. Système intégrateur

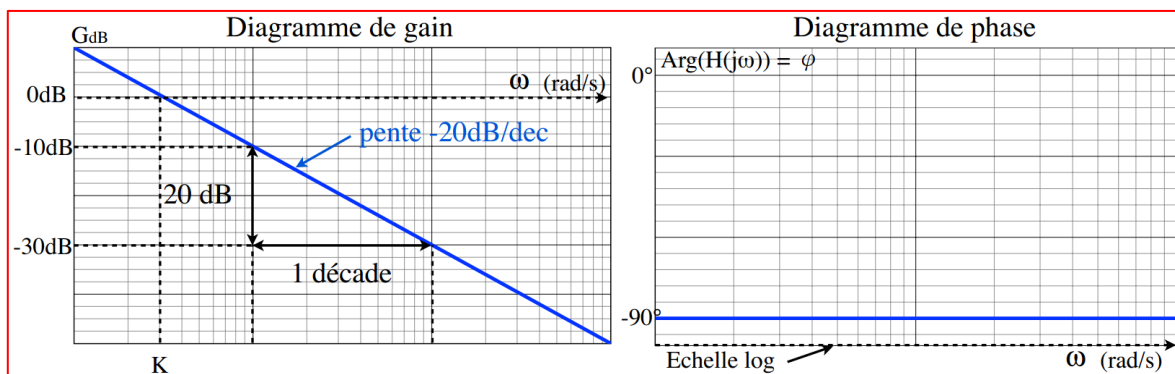
La fonction de transfert harmonique d'un système intégrateur ($\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$, avec $K > 0$) s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

On a alors :

- $G_{dB}(H(j\omega)) = 20 \log\left(\frac{K}{\omega}\right) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$
- $Arg(H(j\omega)) = Arg(K) - Arg(j\omega) = -90^\circ$

L'évolution du module est donc une droite de pente -20dB/décade , tandis que la phase est constante à -90° .



4.3. Réponse harmonique d'un système du premier ordre

4.3.1. Tracé asymptotique

La fonction de transfert harmonique d'un système du premier ordre ($\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$) s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

On a alors comme gain, en décibels :

$$G_{dB}(H(j\omega)) = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log\left(\frac{K}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\right) = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Et pour la phase, en degrés :

$$\varphi(\omega) = Arg(H(j\omega)) = -Arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = [-\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)]$$

Lieu des asymptotes : diagramme de gain

- Pour $\omega \ll \omega_0$, on a :

$$G_{dB}(H(j\omega)) \cong 20 \log(K)$$

Car :

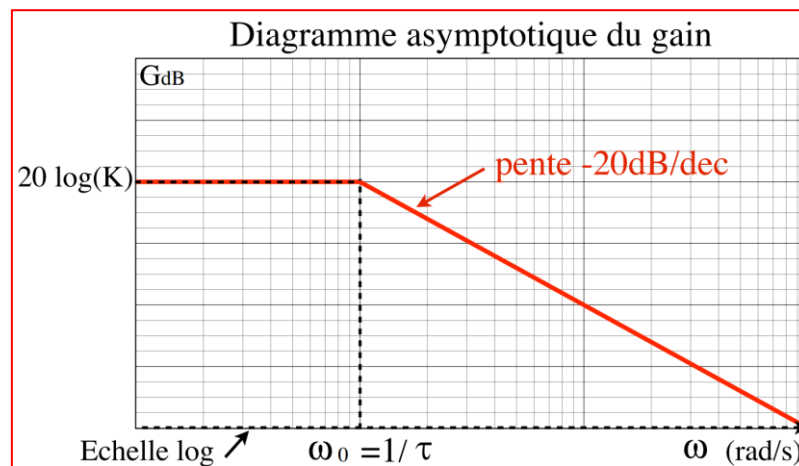
$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1, \text{ donc } 20 \log \left(\sqrt{1^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \cong 20 \log(1) \cong 0$$

- Pour $\omega \gg \omega_0$, on a :

$$G_{dB}(H(j\omega)) \cong 20 \log(K) - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Car :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \gg 1, \text{ donc } 20 \log \left(\sqrt{1^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \cong 20 \log \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

**Lieu des asymptotes : diagramme de phase**

- Pour $\omega \ll \omega_0$, on a :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) \cong 0^\circ$$

Car :

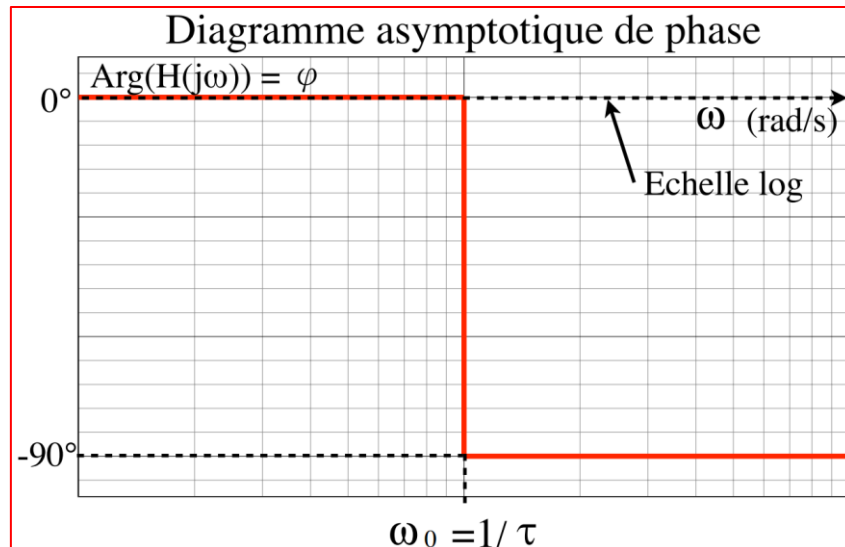
$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1, \text{ donc } \text{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right) \cong \text{Arg}(1) = 0^\circ$$

- Pour $\omega \gg \omega_0$, on a :

$$\text{Arg}(H(j\omega)) \cong -90^\circ$$

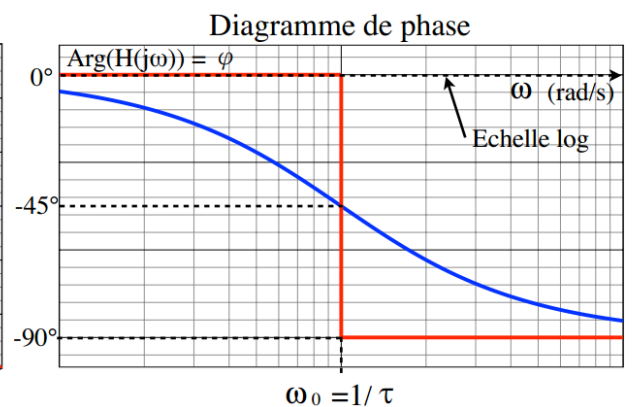
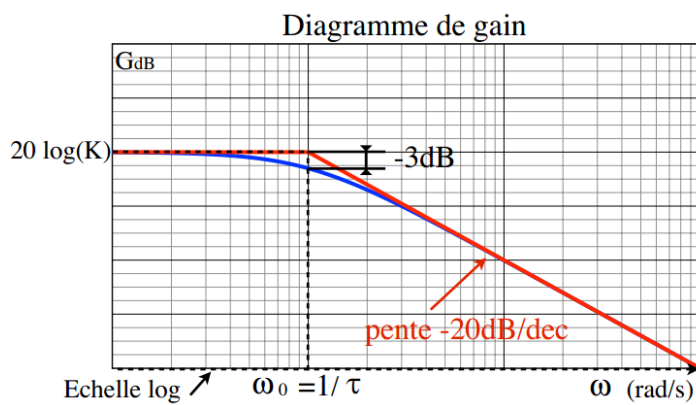
Car :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1, \text{ donc } \text{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right) \cong \text{Arg} \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right) = 90^\circ$$

**Tracé réel :**

On a comme propriétés des courbes réelles :

- le gain G_{dB} est strictement décroissant car log est strictement croissante ;
- la phase $\text{Arg}(H(j\omega)) = \varphi$ est strictement décroissante ;
- en ω_0 le gain vaut $G_{dB}(H(j\omega)) = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{2}) \cong 20 \log(K) - 3dB$;
- en ω_0 la phase vaut $\text{Arg}(H(j\omega)) = \varphi = -45^\circ$.



4.3.2. Méthodologie de tracé

Pour réaliser le tracé d'un diagramme de Bode, il faut procéder dans l'ordre selon les 5 étapes suivantes :

- Déterminer l'expression du gain en décibels et de la phase en degrés de la fonction de transfert considérée.
- Déterminer la direction des asymptotes quand $\omega \rightarrow 0$ (ou $\omega \ll \omega_0$) et quand $\omega \rightarrow +\infty$ (ou $\omega \gg \omega_0$) pour le gain et la phase.
- Déterminer le lieu de l'intersection des asymptotes pour le gain ($\omega = \omega_0 = \frac{1}{\tau}$).
- Réaliser le tracé des asymptotes sur le diagramme.
- Réaliser le tracé réel approximatif en s'aidant des asymptotes.

4.4. Réponse harmonique d'un système du second ordre

La fonction de transfert harmonique d'un système du second ordre s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

De la même manière que pour l'analyse temporelle, l'analyse fréquentielle des systèmes du 2nd ordre peut se décomposer en trois cas, qui dépendent des racines du dénominateur de la fonction de transfert harmonique.

4.4.1. Premier cas : $z > 1$

Dans ce cas, on peut écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}$$

Avec :

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0(z - \sqrt{z^2 - 1})} \text{ et } \tau_2 = \frac{1}{\omega_0(z + \sqrt{z^2 - 1})} \quad (\tau_2 < \tau_1)$$

Ainsi, la fonction de transfert harmonique est le produit de deux 1^{er} ordres. Il suffit de sommer les tracés asymptotiques pour obtenir le tracé asymptotique complet.

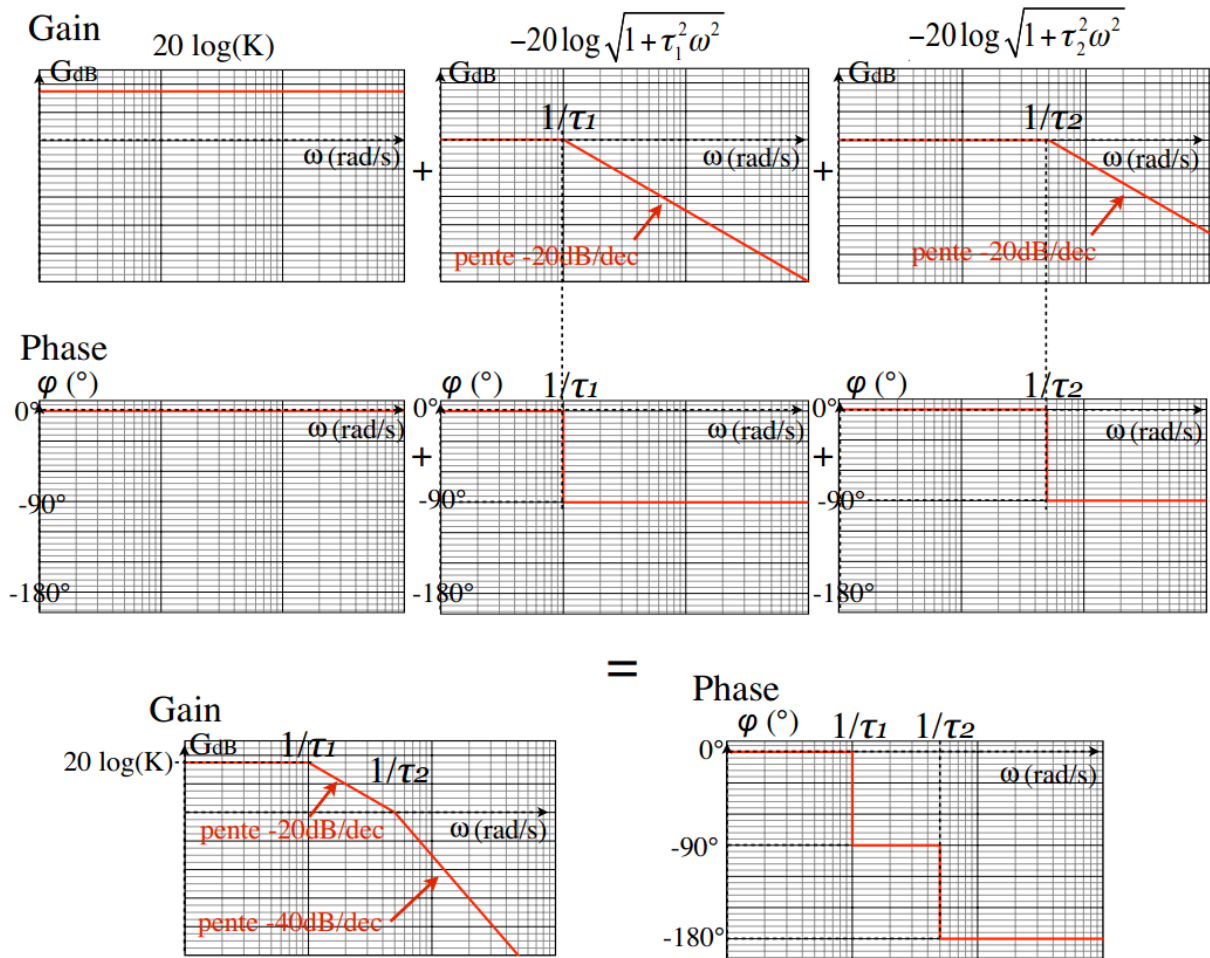
On a ainsi pour le gain :

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2}\right) - 20 \log\left(\sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}\right)$$

Et pour la phase :

$$\varphi = -\text{Arg}(1 + j\tau_1 \omega) - \text{Arg}(1 + j\tau_2 \omega)$$

Tracé asymptotique :

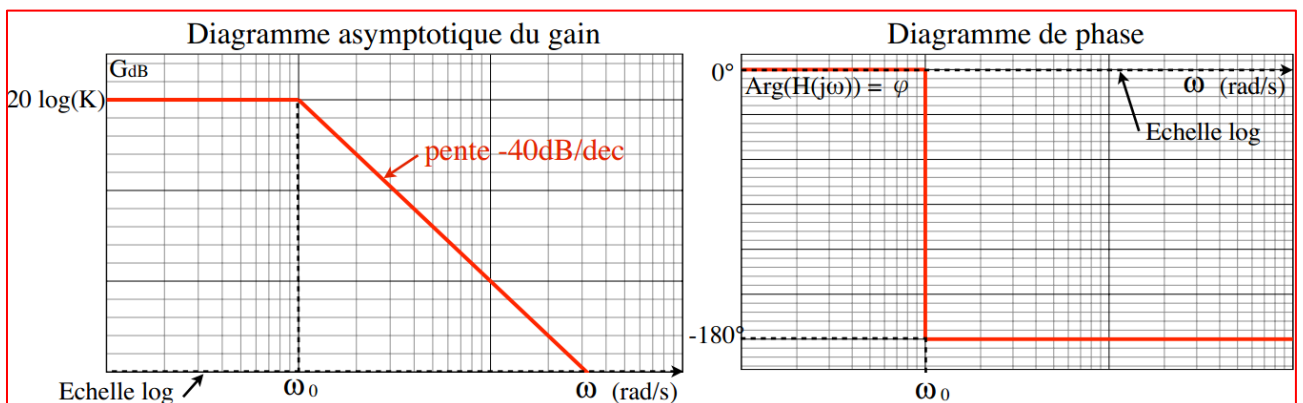


4.4.2. Deuxième cas : z = 1

Si z = 1, on peut alors écrire la fonction de transfert harmonique sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega + (\frac{j\omega}{\omega_0})^2} = \frac{K}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

Par la même méthode que dans le cas précédent, si τ₁ = τ₂, on a :



4.4.3. Troisième cas : $z < 1$

Il n'existe pas de racines réelles pour le dénominateur. La fonction de transfert harmonique reste donc sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Le module de $H(j\omega)$ s'écrit alors :

$$|H(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{\omega_0} \omega\right)^2}}$$

Et la phase :

$$\varphi = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Arg}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\omega \frac{2z}{\omega_0}\right)$$

Lieu des asymptotes : diagramme de gain

- Pour $\omega \ll \omega_0$, on a :

$$G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) \cong 20 \log(|K|) \text{ (asymptote horizontale)}$$

Car :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1, \text{ donc } \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{\omega_0} \omega\right)^2} \cong 1$$

- Pour $\omega \gg \omega_0$, on a :

$$G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) \cong 20 \log(|K|) + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega) \text{ (pente de } -40 \text{ dB/décade)}$$

Car :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \gg 1, \text{ donc } \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{\omega_0} \omega\right)^2} \cong \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + \left(\frac{2z}{\omega_0} \omega\right)^2} \cong \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

- Les deux asymptotes se coupent en $\omega = \omega_0$

Lieu des asymptotes : diagramme de phase

- Pour $\omega \ll \omega_0$, on a :

$$\varphi = -\text{Arg} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j\omega \frac{2z}{\omega_0} \right) \cong 0^\circ$$

- Pour $\omega \gg \omega_0$, on a :

$$\varphi = -\text{Arg} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j\omega \frac{2z}{\omega_0} \right) \cong -180^\circ$$

- En $\omega = \omega_0$, on a :

$$\varphi = -\text{Arg} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j\omega \frac{2z}{\omega_0} \right) = -90^\circ$$

Tracé réel :

Pour le tracé réel, on s'intéresse aux variations de la phase et du gain. Pour cela, on calcule la dérivée première du gain et de la phase.

- Pour la phase :

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{-f'(\omega)}{1 + f(\omega)^2} \text{ avec } f(\omega) = \frac{2z\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

La dérivée est donc du signe de $-f'(\omega)$. On a :

$$-f'(\omega) = \frac{2z\omega_0(\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} > 0 \text{ donc } \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} < 0$$

La phase est donc strictement décroissante

- Pour le gain :

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = \frac{-K \left[-\frac{1}{2} \left(2 \left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2} \right) \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) + \frac{4z^2}{\omega_0^2} 2\omega \right) \right]}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2z}{\omega_0} \omega \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = \frac{2K \frac{\omega}{\omega_0^2} [2z^2 - 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2]}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2z}{\omega_0} \omega \right)^2 \right]^{3/2}}$$

La dérivée peut donc s'annuler pour $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$ dans le cas où $z < \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7$.

- Si $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la dérivée est strictement négative. Le gain est donc strictement décroissant.
- Si $z < \frac{1}{\sqrt{2}}$, la courbe présente un maximum local en $\omega = \omega_r$.

On définit alors un **facteur de résonance** (appelé aussi facteur de surtension) qui mesure le dépassement du gain en $\omega = \omega_r$ par rapport à son asymptote horizontale :

$$Q_r = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(j\omega)_{\omega \rightarrow 0}|} = \frac{\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}}{\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}} \quad \text{ou encore } G_{dB}(\omega_r) = 20\log\left(\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}\right)$$

Diagramme de gain

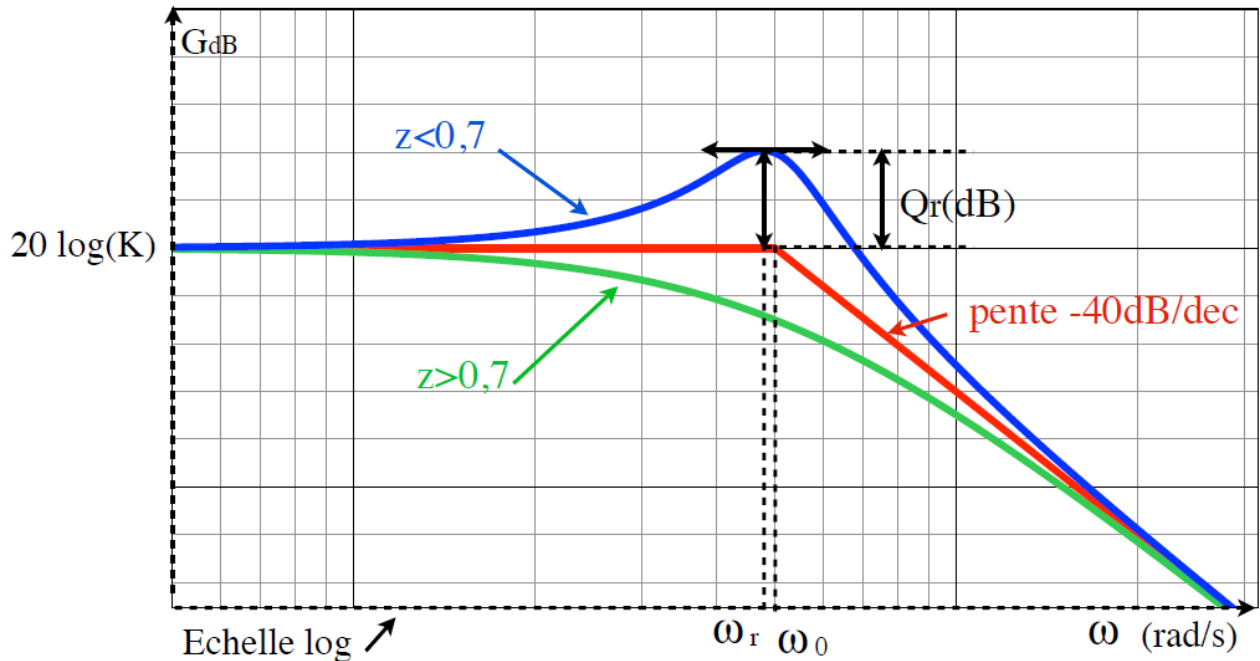
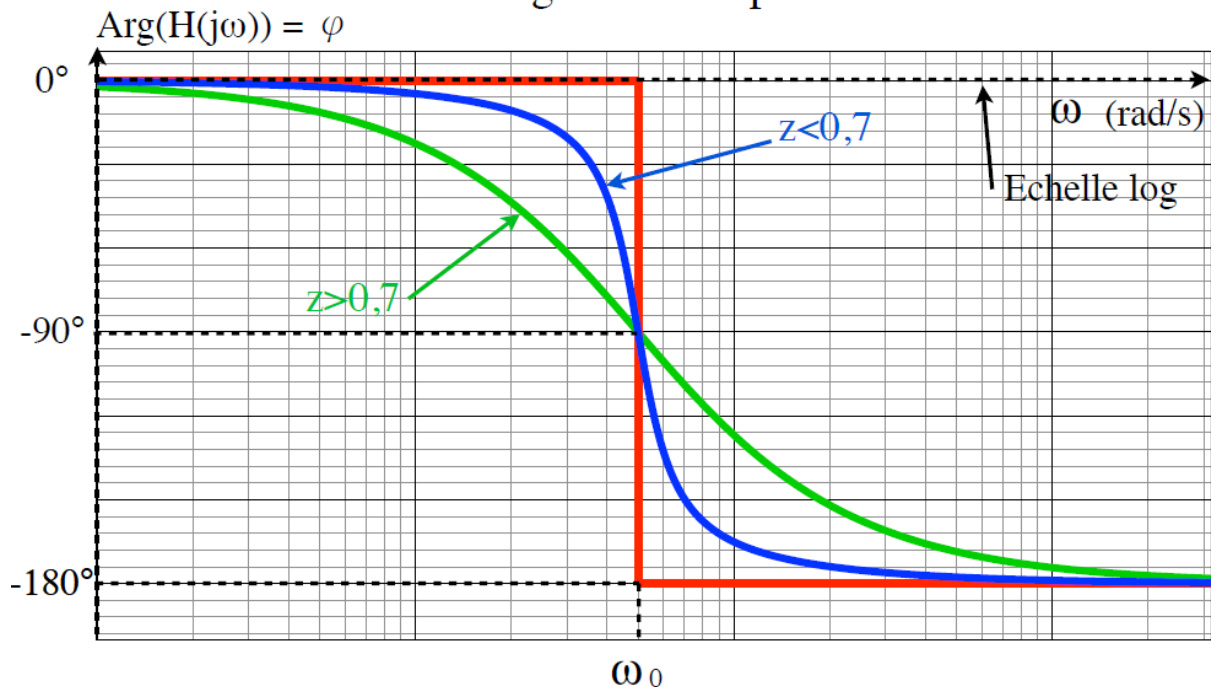
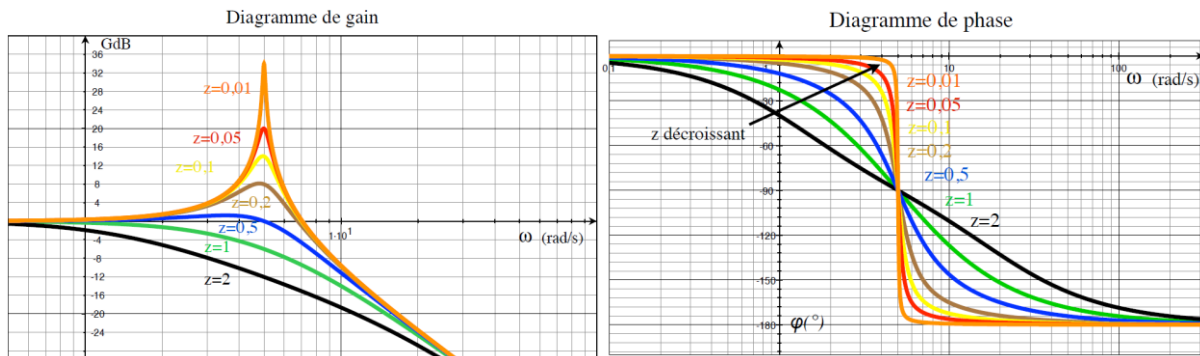


Diagramme de phase



4.4.4. Influence de z

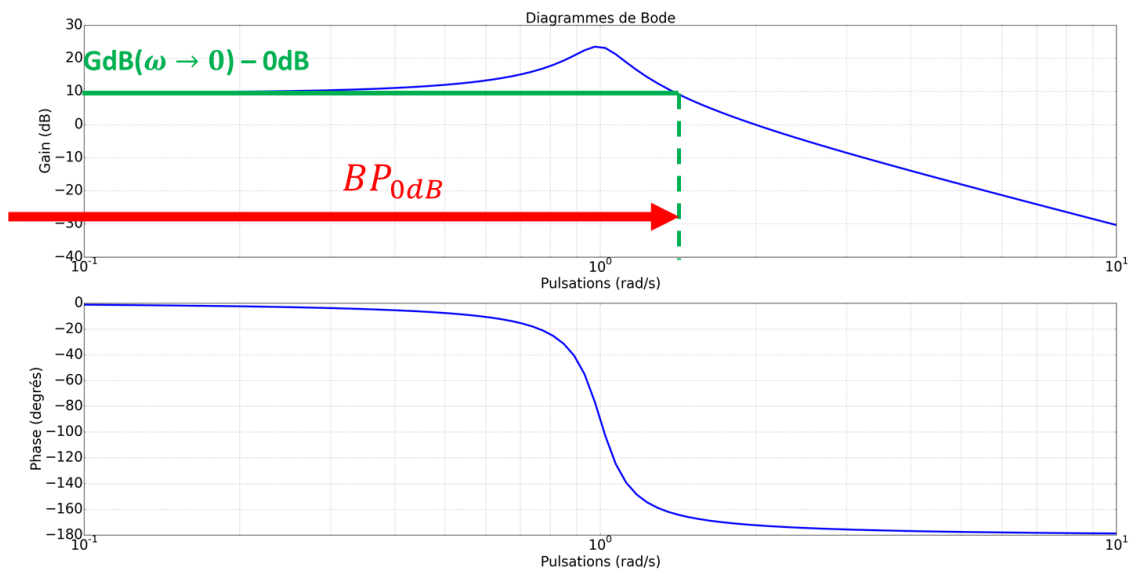
On trace le diagramme de Bode pour un système du second ordre avec $K=1$ et $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$.



5. Bande passante

On appelle bande passante à x dB d'un système la plage de pulsations ou de fréquences pour laquelle le signal de sortie subit un affaiblissement inférieur à x dB par rapport à sa valeur pour $\omega = 0$.

On appelle aussi bande passante la plage de pulsations ou de fréquences pour laquelle le signal de sortie subit un affaiblissement égal à sa valeur pour $\omega = 0$. Cette autre définition fait intervenir la pulsation de coupure ω_{c0} .



Remarque : La bande passante augmente avec le gain statique K et diminue quand la constante de temps τ augmente pour un premier ordre. Si la bande passante augmente, alors la constante de temps diminue et le système devient plus rapide.

6. Tableau récapitulatif

FT	Diagramme gain	Diagramme phase
$H(p) = \frac{1}{p}$		
$H(p) = p$		
$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$		
$H(p) = 1 + \tau p$		
$H(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + 1}$		
$H(p) = \frac{p^2}{\omega_0^2} + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + 1$		

7. Méthode de détermination graphique des paramètres d'une FT

7.1. Système du premier ordre

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Valeur finale de la phase = -90°

Détermination de K :

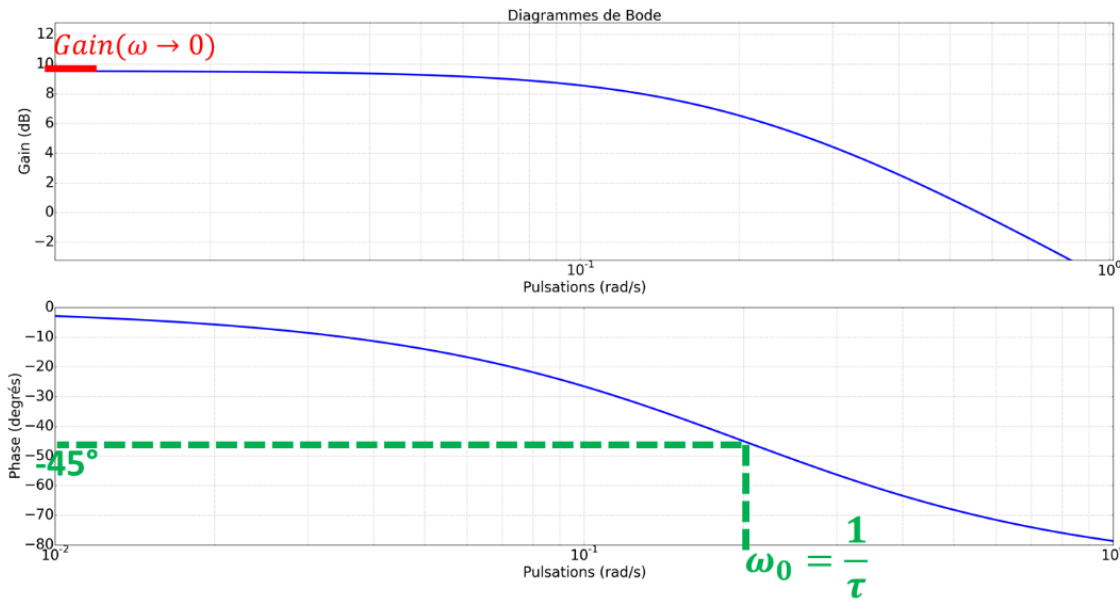
- $20\log(K) = \text{Gain}(\omega \rightarrow 0)$

donc $K = 10^{\frac{\text{Gain}(\omega \rightarrow 0)}{20}}$

Détermination de τ :

- Abscisse de la Phase à -45°

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$$



7.2. Système du second ordre

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Valeur finale de la phase = -180°

Détermination de K :

- $20\log(K) = \text{Gain}(\omega \rightarrow 0)$

donc $K = 10^{\frac{\text{Gain}(\omega \rightarrow 0)}{20}}$

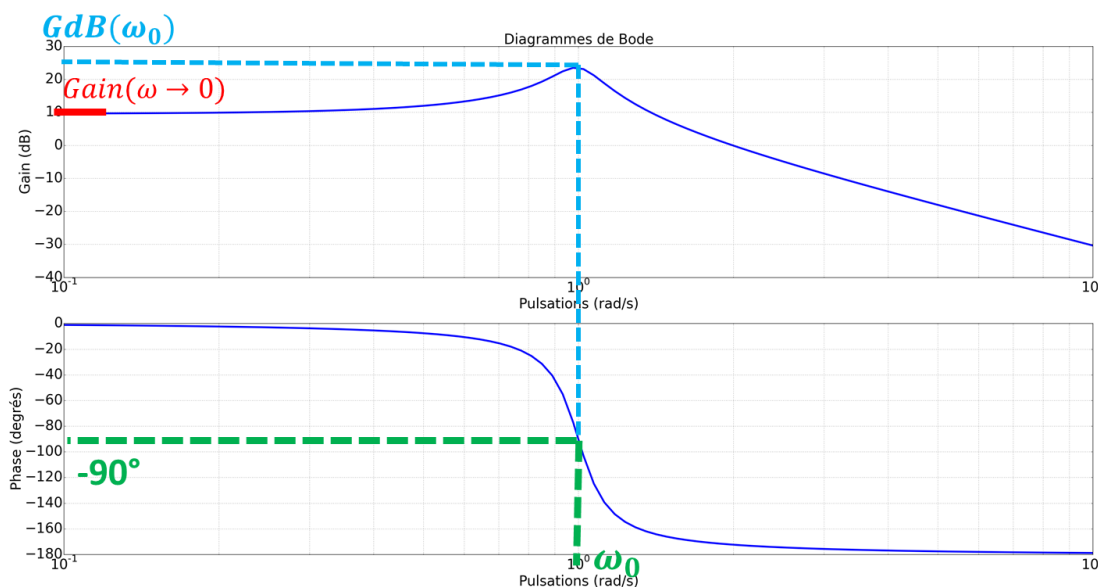
Détermination de ω_0 :

- Abscisse de la Phase à -90°

Détermination de z (après ω_0) :

- $Gdb(\omega_0) = 20 \log\left(\frac{K}{2z}\right)$

Formule valable quelque soit la valeur de z



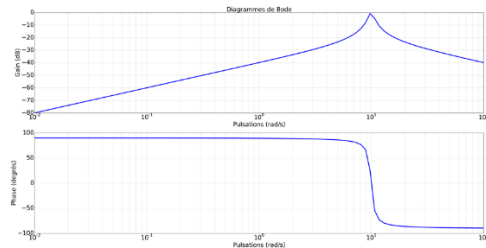
8. ANNEXE : Tracé de diagramme de Bode sous Python

`import scipy.signal as sgn` → Permet de définir une FT (Numérateur+ Dénominateur)

$$H(j\omega) = \frac{0.01 \cdot j\omega}{1 + 0.01 \cdot j\omega + 0.01 \cdot (j\omega)^2}$$

```
num = np.poly1d([0.01,0])
den = np.poly1d([0.01,0.01,1])
H=sgn.lti(num,den)
```

`(listew, listegain, listephase)= sgn.bode(H)` → Tulle : Liste des pulsations , Liste des gains (dB) , Liste des phases (degrés)



Liste de pulsations → déterminée automatiquement
(pour faire apparaître les éléments caractéristiques de la FT)

```
import scipy.signal as sgn
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
listez = [0.2,1,2]
plt.figure(1)
for z in listez:
    num = np.poly1d([1])
    den = np.poly1d([1,2*z,1])
    H = sgn.lti(num,den)
    (listew, listegain, listephase)= sgn.bode(H)
    plt.subplot(2,1,1)
    plt.plot(listew, listegain, label="z= " +str(z), linewidth=4)
    plt.subplot(2,1,2)
    plt.plot(listew, listephase, label="z= " +str(z), linewidth=4)
plt.subplot(2,1,1)
plt.xscale('log', size=30)
plt.xlabel('Pulsations (rad/s)', size=30)
plt.ylabel('Gain (dB)', size=30)
plt.legend(fontsize=30)
plt.grid(which="both")
plt.tick_params(axis = 'both', labelsize = 30)
plt.title('Diagrammes de Bode', fontsize=30)
plt.subplot(2,1,2)
plt.xscale('log', size=30)
plt.xlabel('Pulsations (rad/s)', size=30)
plt.ylabel('Phase (degrés)', size=30)
plt.legend(fontsize=30)
plt.grid(which="both")
plt.tick_params(axis = 'both', labelsize = 30)
plt.show()
```

Variation de z

Définition de la FT

Création de la FT

Tracé du diagramme de GAIN

Tracé du diagramme de PHASE

