

# DS 5 Sciences de l'ingénieur

## PCSI

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il est demandé au candidat de formuler toutes les hypothèses qu'il jugera nécessaires pour répondre aux questions posées.

**La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.** En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à **encadrer** les résultats littéraux et **souligner** les résultats numériques.

**Toutes les réponses doivent être inscrites sur le document réponse.**

*Certaines questions sont très calculatoires, vous devez utiliser du brouillon !*

*Utiliser un stylo avec du contraste, pas de crayon papier !*

*Je ne lirai pas vos réponses si je juge que c'est illisible. Attention à vos développements de calculs, ils doivent être bien présentés et lisibles.*

*La taille des zones réponses ne présage pas de la longueur des réponses attendues, il y a souvent trop de place !*

### Contenu du sujet : 2 documents

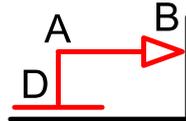
- Énoncé de 9 pages
- Document réponse de 10 pages

**Durée : 2h30**  
**Calculatrice autorisée**

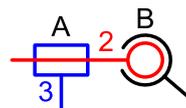


## Partie 1 : Questions de cours

Q1 : Par le calcul par la **METHODE STATIQUE**, déterminer la liaison équivalente du système suivant :



Q2 : Par le calcul par la **METHODE STATIQUE**, déterminer la liaison équivalente du système suivant :

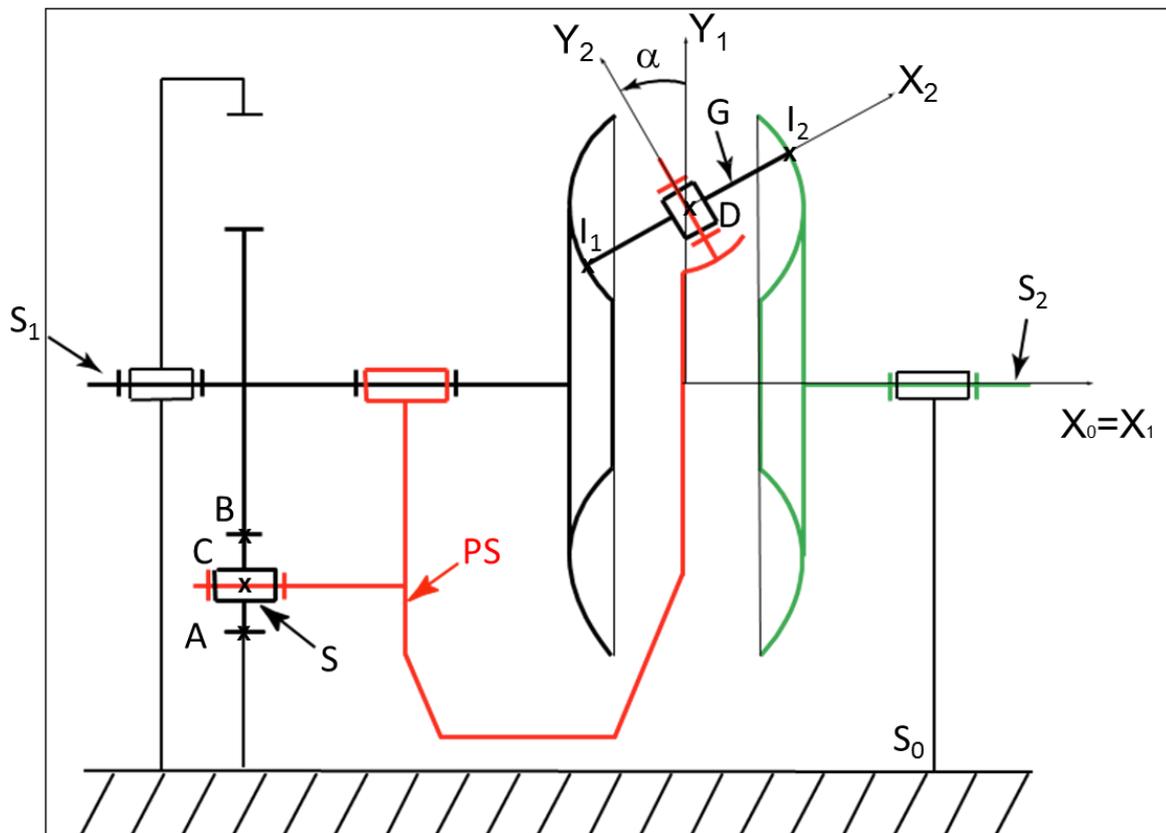


## Partie 2 : CINEMATIQUE : TRAN EPI et RSG

Le système étudié est un variateur continu de vitesse. L'objectif est de déterminer le rapport de réduction entre les vitesses de rotation de l'arbre d'entrée et de sortie en fonction d'un paramètre de réglage  $\alpha$  et des caractéristiques géométriques (nombre de dents, longueurs).

Le variateur est décrit sur le schéma cinématique suivant, il comporte 2 sous-systèmes distincts :

- un train épicycloïdal à engrenage  $\{S_1, S, S_0, PS\}$
- un système de variation continu par galet  $\{S_1, S_2, S_0, PS, G\}$



Le bâti est noté  $S_0$ . L'arbre d'entrée ( $S_1$ ) et l'arbre de sortie ( $S_2$ ) sont en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$  avec le bâti ( $S_0$ ). Le porte-satellite (PS) est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$  avec ( $S_1$ ).

Les vitesses de rotation sont notées :

- Pour  $S_1/S_0$  :  $\overrightarrow{\Omega_{S_1/S_0}} = \omega_{1/0} \vec{x}$
- Pour  $S_2/S_0$  :  $\overrightarrow{\Omega_{S_2/S_0}} = \omega_{2/0} \vec{x}$
- Pour  $PS/S_1$  :  $\overrightarrow{\Omega_{PS/S_1}} = \omega_{PS/1} \vec{x}$
- Pour  $PS/S_0$  :  $\overrightarrow{\Omega_{PS/S_0}} = \omega_{PS/0} \vec{x}$

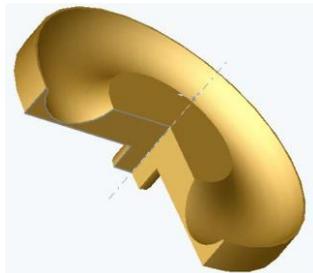
On associe le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  au bâti  $S_0$

### Sous-système 1 : train épicycloïdal

La rotation du porte satellite (PS) est obtenue à partir de la rotation de l'arbre d'entrée (S1) par l'intermédiaire d'un train épicycloïdal constitué d'un pignon satellite (S), en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x})$  avec (PS). (S) engrène avec (S1) en B et avec (S0) en A.

On note :

- Vitesse de rotation de S/PS :  $\overrightarrow{\Omega_{S/PS}} = \omega_{S/PS} \vec{x}$
- Z1 nombre de dents de la roue dentée liée à S1
- Z0 nombre de dents de la couronne liée à S0
- Z nombre de dents du satellite S



Détail d'une surface torique liée à S1 ou S2  
(1/4 enlevé)

### Sous-système 2 : variateur à galet

Le porte-satellite supporte des galets orientables tels que le galet (G). Le galet (G) est en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{y}_2)$  avec (PS) et roule sans glisser en I1 et I2 sur deux surfaces toriques liées à (S1) et (S2).

On note :

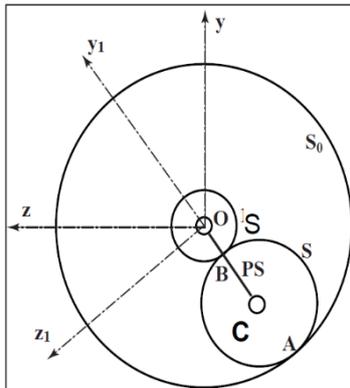
- Vitesse de rotation de G/PS :  $\overrightarrow{\Omega_{G/PS}} = \omega_{G/PS} \vec{y}_2$
- r le rayon du galet (centre D)
- $\overrightarrow{OD} \cdot \vec{y}_1 = L$  ;  $\overrightarrow{DI}_2 = r \vec{x}_2$  ;  $\overrightarrow{DI}_1 = -r \vec{x}_2$
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  repère lié à PS
- $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$  lié à PS et tel que  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  ( $\alpha$  est réglable mais supposé constant pendant le fonctionnement)

### Graphe des liaisons

**Q1** : Réaliser le graphe des liaisons complet (points et axes !!) du mécanisme.

**Les question 2/3/4 sont indépendantes des questions 5/6/7**

### Etude de l'étage de réduction de rapport fixe constitué d'un train épicycloïdal



L'objectif est de déterminer la vitesse de rotation du porte satellite (PS) en fonction de l'arbre d'entrée (S1) :  $\frac{\omega_{PS/0}}{\omega_{1/0}}$

**Q2 :** Traduire la condition d'engrènement en B entre S1 et S. Donner la relation sur les vitesses de rotation en fonction des nombres de dents Z1 et Z.

**Q3 :** Traduire la condition d'engrènement en A entre S et S0. Donner la relation sur les vitesses de rotation en fonction des nombres de dents Z et Z0.

**Q4 :** En déduire le rapport de réduction du train épicycloïdal :  $\frac{\omega_{PS/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction de Z0 et Z1.

### Etude du variateur continu à galets

Le porte satellite supporte des galets qui roulent sans glisser.

**Q5 :** Quelle est la trajectoire du point D par rapport à  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ?

**Q6 :** En exprimant le fait qu'il y a roulement sans glissement en I1 entre le galet et la surface torique liée à (S1), trouvez une relation entre  $\omega_{G/PS}, \omega_{PS/0}, \omega_{1/0}, L, r$  et  $\alpha$ .

**Q7 :** En exprimant le fait qu'il y a roulement sans glissement en I2 entre le galet et la surface torique liée à (S2), trouvez une relation entre  $\omega_{G/PS}, \omega_{PS/0}, \omega_{2/0}, L, r$  et  $\alpha$ .

### Synthèse

**Q8 :** En utilisant les relations obtenues dans les parties I et II, déterminer le rapport de réduction du mécanisme :  $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}$  en fonction de Z1, Z0, L, r et  $\alpha$ .

## Partie 3 : STATIQUE

### Modélisation de l'ensemble tête-cou dans le plan sagittal

Dans l'exercice proposé ici, nous nous intéresserons à une modélisation de l'ensemble tête-cou dans le plan sagittal. Nous nous intéresserons plus spécifiquement aux efforts dans les muscles permettant de conserver l'équilibre de la tête soumise à son propre poids et à des décélérations horizontales. La figure n°1 présente la modélisation plane retenue pour ce problème.

Dans ce modèle le thorax **0** sera supposé fixe (bâti). Le cou **1** s'articule, en bas, avec le thorax **0** par une liaison pivot de centre **O** et, en haut, avec la tête **2** par une liaison pivot de centre **A**. Les muscles occipito-cervicaux **3** s'articulent, en bas, avec le cou **1** par une liaison pivot de centre **D** et, en haut, avec la tête **2** par une liaison pivot de centre **B**. Les muscles occipito-thoraciques **4** s'articulent, en bas, avec le thorax **0** par une liaison pivot de centre **T** et, en haut, avec la tête **2** par une liaison de centre **C**. On notera  $\alpha$  l'angle entre le repère  $R_0$  associé au thorax **0** et le repère  $R_1$  associé au cou **1** – attention  $\alpha$  est négatif (mais cela ne change en rien nos calculs et méthodes vues en cours !!).

On notera **G** le centre de gravité de la tête **2** et **M** sa masse. De plus, la tête **2** est soumise à une décélération par rapport au thorax **0**. Les masses des autres solides sont supposées négligeable devant la masse de la tête **2**. On notera les torseurs associés à ces actions mécaniques comme ci-dessous :

$$\left\{ \mathbf{T}_{\text{Terre}/2} \right\}_G = \begin{Bmatrix} -\mathbf{M} \cdot \mathbf{g} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathbf{T}_{\text{Acc}/2} \right\}_G = \begin{Bmatrix} \mathbf{M} \cdot \Gamma \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

**Question n°1** : Géométrie – coordonnées des points dans  $R_0$

a) Montrer que les coordonnées dans le repère  $R_0$  des points ci-dessous sont égales à :

Noms	$X_0$	$Y_0$
<b>A</b>	$-L \cdot \sin(\alpha)$	$L \cdot \cos(\alpha)$
<b>G</b>	$a - L \cdot \sin(\alpha)$	$b + L \cdot \cos(\alpha)$
<b>B</b>	$-L \cdot \sin(\alpha) - e / \cos(\alpha)$	$L \cdot \cos(\alpha)$
<b>C</b>	$-L \cdot \sin(\alpha) - d / \cos(\alpha)$	$L \cdot \cos(\alpha)$
<b>T</b>	$-d / \cos(\alpha)$	0

b) Montrer que les coordonnées du vecteur **AG** dans le repère  $R_1$  sont égales à :

$$\vec{AG} = (a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \sin(\alpha)) \cdot \vec{x}_1 + (-a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \cos(\alpha)) \cdot \vec{y}_1$$

**Question n°2 :** Graphe de liaisons – scénario de résolution

- a) Faire le graphe de liaisons pour le problème proposé. Vous prendrez soin de bien spécifier le nombre d'inconnues au niveau de chacune des liaisons.
- b) Proposer un scénario de résolution qui permettrait de calculer toutes les inconnues de liaison. Vous prendrez soin de bien expliciter vos choix.

**Question n°3 :** Etude des muscles 3 et 4.

Isoler le muscle 3 puis le muscle 4 et en déduire que :

$$\left\{ \mathbf{T}_{2/3} \right\} = - \left\{ \mathbf{T}_{1/3} \right\} = \underset{\text{B ou D}}{\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{2/3} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \quad \text{et} \quad \left\{ \mathbf{T}_{2/4} \right\} = - \left\{ \mathbf{T}_{0/4} \right\} = \underset{\text{Cou T}}{\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{2/4} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

**Question n°4 :** Etude de l'ensemble {1, 2, 3, 4}

Isoler l'ensemble {1, 2, 3, 4} et en déduire que :

$$\left\{ \mathbf{T}_{0/4} \right\} = \underset{\text{T}}{\left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{M} \cdot \left[ \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{x}_G}{d} + \Gamma \cdot \frac{\mathbf{y}_G}{d} \right] \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

$$\left\{ \mathbf{T}_{0/1} \right\} = \underset{\text{o}}{\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M} \cdot \left[ \begin{array}{l} - \left[ \mathbf{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{\mathbf{x}_G}{d} + \Gamma \cdot \left( 1 + \sin(\alpha) \cdot \frac{\mathbf{y}_G}{d} \right) \right] \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}_0 \\ + \left[ \mathbf{g} \cdot \left( 1 + \cos(\alpha) \cdot \frac{\mathbf{x}_G}{d} \right) + \Gamma \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{\mathbf{y}_G}{d} \right] \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}_0 \end{array} \right] \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

Avec :  $\mathbf{x}_G = \mathbf{a} - \mathbf{L} \cdot \sin(\alpha)$  et  $\mathbf{y}_G = \mathbf{b} + \mathbf{L} \cdot \cos(\alpha)$

**Question n°5 :** Réécriture du torseur d'action mécanique du thorax 0 sur le cou 1.

Montrer que l'on peut réécrire le torseur d'action mécanique du thorax 0 sur le cou 1 sous la forme suivante que vous discuterez :

$$\left\{ \mathbf{T}_{0/1} \right\} = \underset{\text{o}}{\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M} \cdot \left[ \left( \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{x}_G}{d} + \Gamma \cdot \frac{\mathbf{y}_G}{d} \right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}_1 - \Gamma \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{g} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}_0 \right] \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

**Question n°6 :** Etude d'un cou « droit » soumis seulement au poids de la tête

Que deviennent ces résultats dans le cas d'un cou « droit » ( $\alpha = 0$ ) soumis seulement au poids de la tête 2 ( $\Gamma = 0$ ) ? Commenter le résultat obtenu.

**Question n°7 :** Etude du cou **1** – Avec  $\alpha$  et  $\Gamma$  quelconques

**a)** Lister et modéliser les actions mécaniques appliquées à **1**. Lister les inconnues associées à chacune de ces actions mécaniques. Peut-on résoudre ?

**b)** En quel point est-il souhaitable de réduire les différents torseurs ? Calculer les efforts au point **A** ainsi que les efforts dans le muscle **3**.

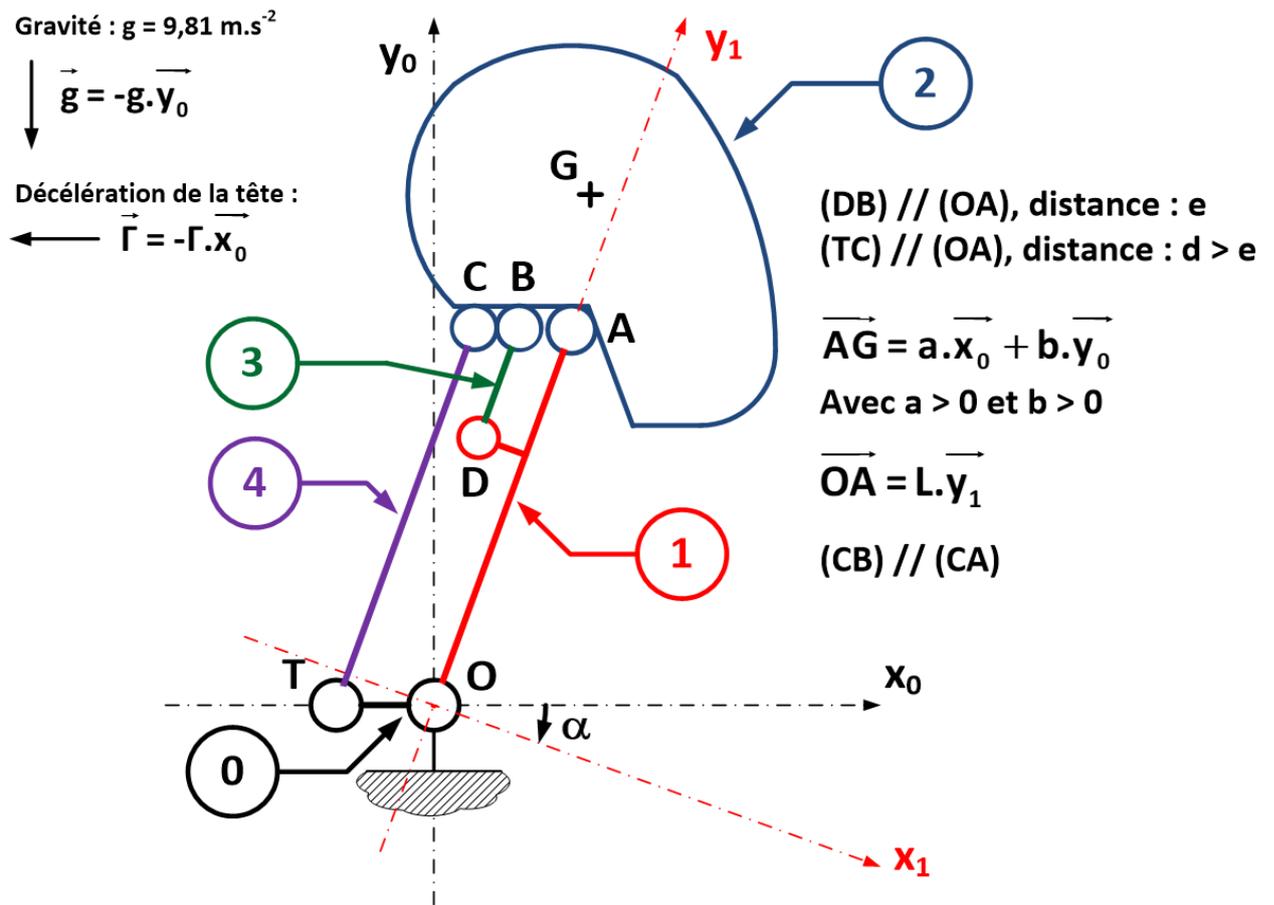
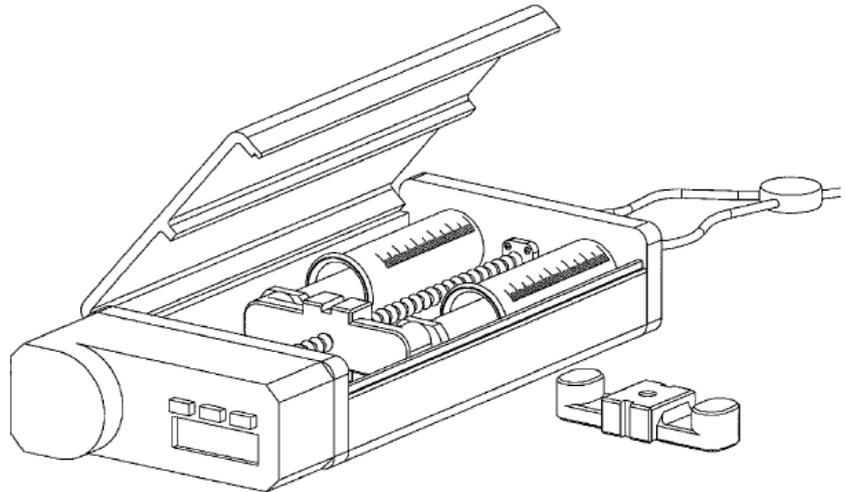


Figure n°1 : Modélisation de l'ensemble tête-cou

## Partie 4 : CINEMATIQUE

Les questions 1, 2+3 et 5 sont indépendantes.

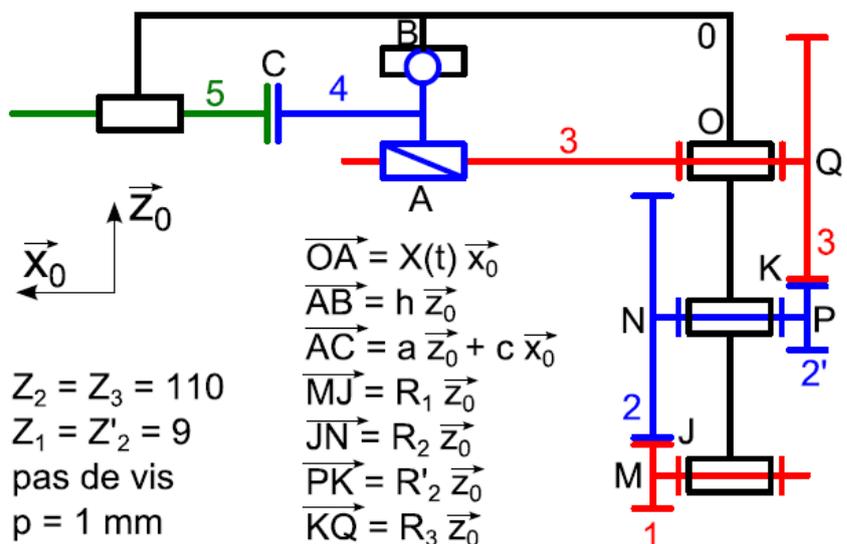
Le système représenté ci-contre est un pousse seringue. Il permet de réaliser le dosage, en continu ou par à-coups d'un médicament dans la perfusion d'un malade (morphine, antalgique ...). On comprend assez bien qu'il est vital de maîtriser les lois de déplacements et de vitesse d'un tel système.



Le schéma ci-contre modélise le système : on souhaite déterminer la relation entre la vitesse du piston de seringue  $V_{50}$  et celle du moteur  $\omega_{10}$ .

Questions

- 1) Déterminez par la méthode de votre choix le rapport de réduction  $\rho = \omega_{30}/\omega_{10}$  en fonction des paramètres fournis. Calculez  $\rho$ .



- 2) Tracez le graphe des liaisons pour les solides 3, 4 et 0.
- 3) Déterminez le torseur cinématique  $\{V_{40}\}$  au point de votre choix, en fonction de  $\omega_{30}$  et des paramètres fournis.
- 4) Démontrez que  $V_{50} = \lambda \omega_{10}$ . Exprimez  $\lambda$  en fonction des paramètres fournis et déterminez numériquement  $\lambda$  (en USI).
- 5) On admettra que  $V_{50} = 10^{-6} \omega_{10}$  ( $V_{50}$  et  $\omega_{10}$  en USI). Le diamètre d'une seringue est de 20 mm. On souhaite pouvoir assurer un débit de 5 ml/h. Quelle doit être la vitesse  $\omega_{10}$  du moteur ?

**Fin du sujet**