

# DS 3 Sciences de l'ingénieur

## PCSI 1

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il est demandé au candidat de formuler toutes les hypothèses qu'il jugera nécessaires pour répondre aux questions posées.

**La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.** En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à **encadrer** les résultats littéraux et **souligner** les résultats numériques.

Toutes les réponses doivent être inscrites sur le document réponse

**Contenu du sujet : 2 documents**

- Énoncé
- Document réponse

**Durée : 2h**

**Calculatrice autorisée**

**Exercice 1 : Régulation de débit d'une trémie**



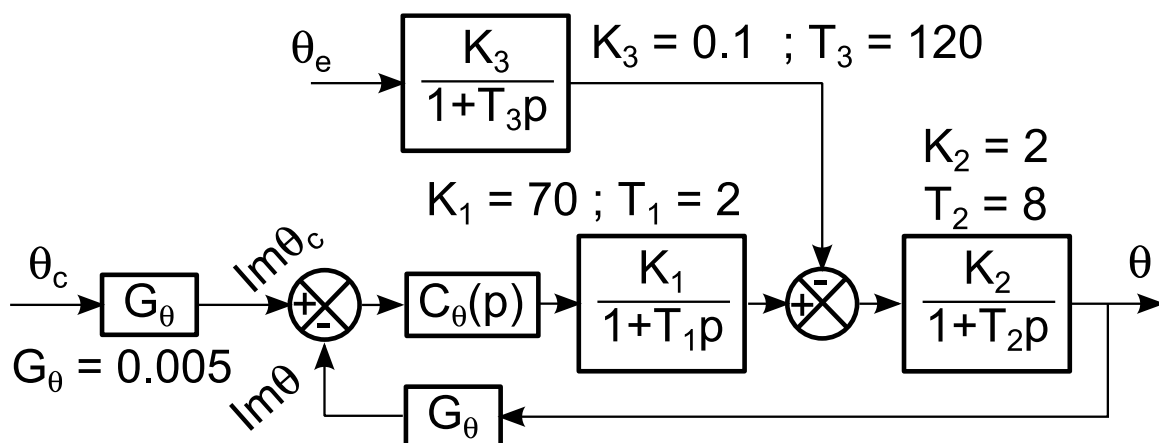
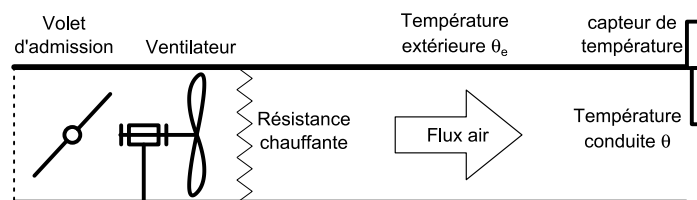
**Présentation du système étudié**

Four industriel intervenant dans la fabrication des tubes du générateur de vapeur dans une centrale nucléaire.

Ces tubes ont un rôle crucial dans le fonctionnement d'une centrale et doivent être totalement étanches

Pour obtenir des tubes de forme et de constitution moléculaire parfaites, les ingénieurs ont imaginé une nouvelle technologie de four industriel permettant de chauffer les alliages de matériaux selon des processus bien définis. Ces fours peuvent fournir des températures de chauffe très précises grâce à un asservissement des transferts thermiques en leur sein. Pour mettre en place la chaîne d'asservissement, il a été nécessaire de parfaitement connaître les transferts thermiques au sein des différentes conduites du four. Les ingénieurs ont donc mis en place une méthodologie destinée à les modéliser.

Les essais sur les conduites du four étant très couteux, on a réalisé une maquette à échelle réduite.



Une succession d'essais en boucle ouverte a permis d'identifier un modèle de comportement d'une conduite. Ce qui permet d'établir le schéma bloc ci-dessus pour l'asservissement en température.

$C_{\theta}(p)$  est un correcteur qui reste à déterminer.

## Cahier des charges

**Erreur statique nulle**

**Temps de réponse optimal sans dépassement.**

## Questions

Les questions 1+2, 3, 4 et 4+5+6 sont indépendantes

**Question 1.** Démontrez que l'équation de fonctionnement donnant  $\theta(p)$  en fonction de  $\theta_c(p)$ ,  $\theta_e(p)$  et  $C_\theta(p)$  se met sous la forme  $\theta(p) = \theta_c(p)H(p) - \theta_e(p)F(p)$ . Vous déterminerez  $H$  et  $F$  en fonction des  $K_1$ ,  $T_1$ ,  $K_2$ ,  $T_2$ ,  $G_\theta$  et  $C_\theta(p)$ . Il est inutile de se mettre sous forme canonique puisque l'on ne connaît pas  $C_\theta(p)$  mais vous simplifierez les expressions de façon à n'avoir qu'une seule « barre » de fraction.

**Question 2.** On considère que la consigne et la perturbation sont deux échelons de poids respectifs  $\theta_c$  et  $\theta_e$ . On se propose d'étudier deux cas de correcteur, l'un purement Proportionnel  $C_\theta(p) = K$  et l'autre Proportionnel Intégral  $C_\theta(p) = K \frac{1 + T_p}{T_p}$ .

Déterminez la valeur finale de  $\theta(t)$  dans les deux cas et déduisez en l'erreur. Justifiez un choix de correcteur.

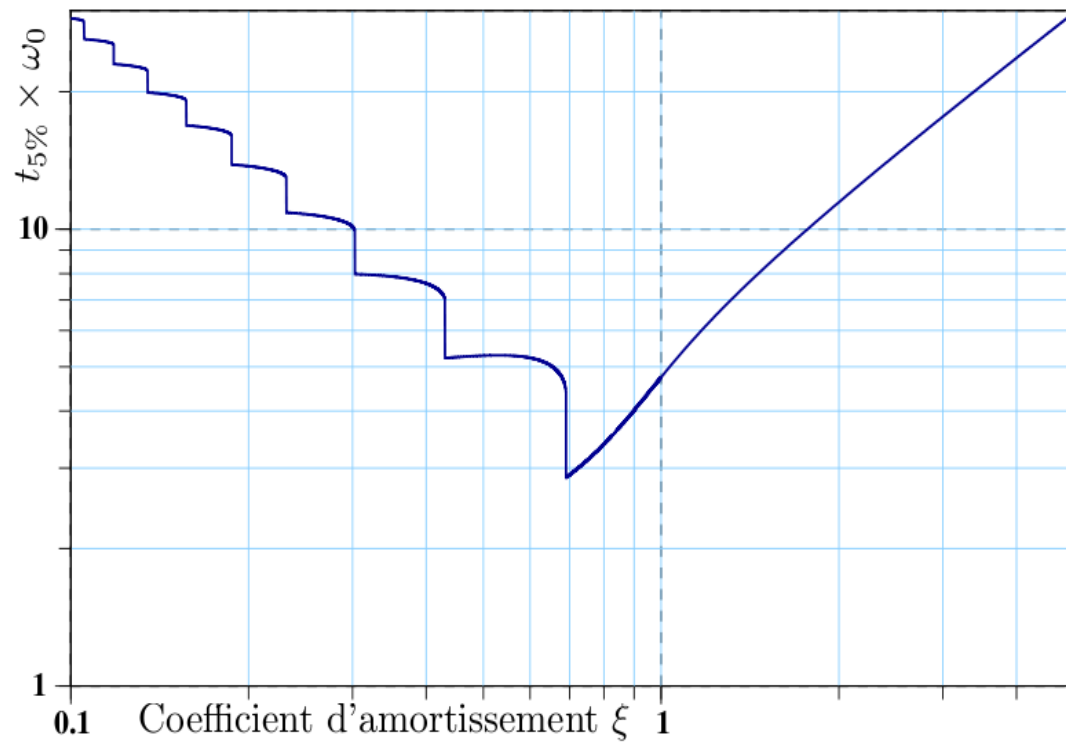
**Question 3.** On adopte le correcteur proportionnel intégral. Explicitez littéralement la boucle ouverte et expliquez dans quel cas celle-ci peut s'écrire  $BO(p) = \frac{0.0875 \times K}{p(1 + 2p)}$

On prendra par la suite **K=4**

**Question 4.** Déterminez, pour cette valeur de  $K$ , la fonction de transfert en boucle fermée ( $Im\theta/Im\theta_c$ ) ainsi que ses caractéristiques (aide : on pourra considérer dans ce cas un système bouclé avec sur la chaîne directe la BO étudiée précédemment et un retour unitaire. Refaites ce schéma sur votre copie et calculez ensuite la FTBF). Vous en déduirez les valeurs du temps de réponse et du dépassement dans le cas d'une réponse indicielle.

**Question 5.** En reprenant l'expression générale de BO (au-dessus de Q4), déterminez la valeur de  $K$  permettant d'avoir le meilleur temps de réponse à un échelon. Déterminez la valeur de ce temps de réponse.

**Question 6.** Tracez les deux réponses temporelles en BF et concluez sur le meilleur réglage.

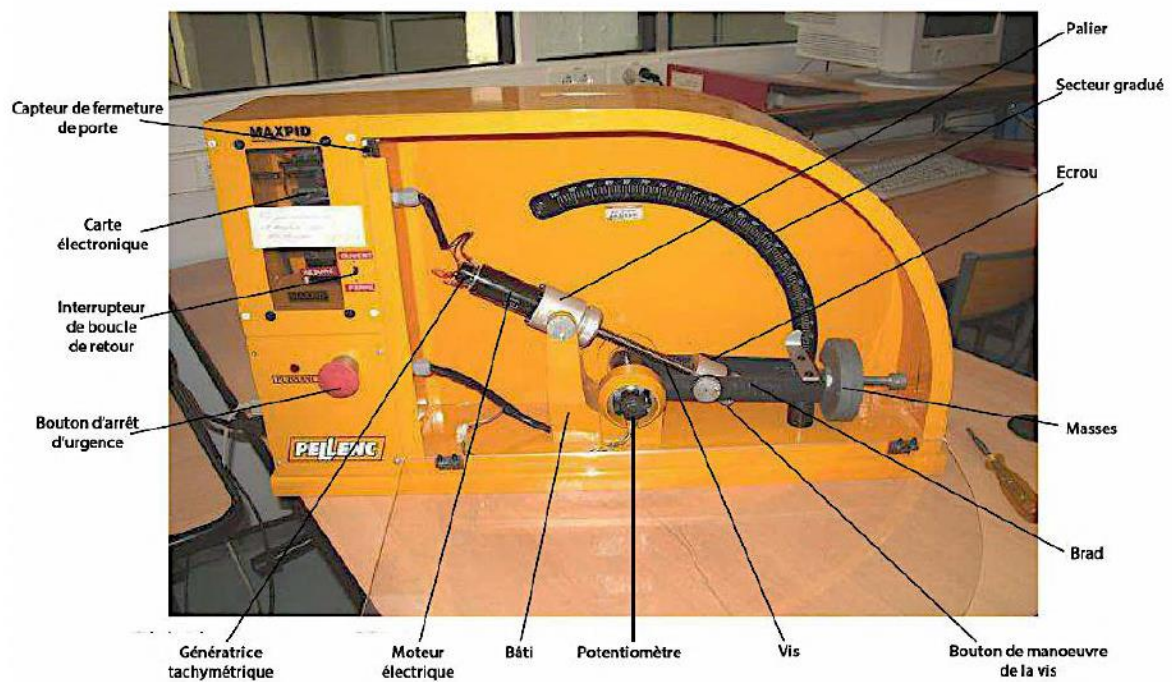


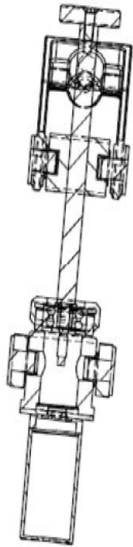
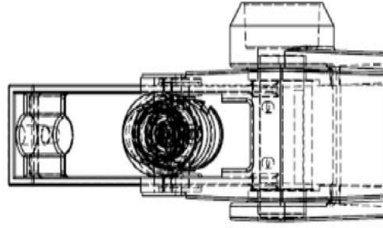
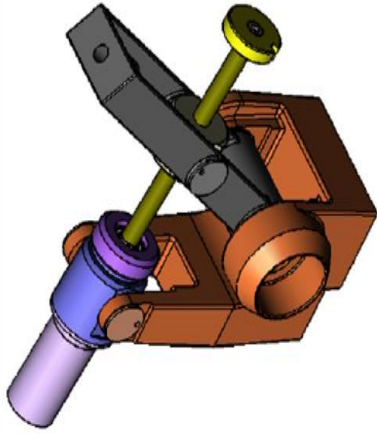
## EXERCICE 2 : Modélisation des liaisons - Bras de robot MAXPID

Le bras articulé Maxpid est extrait d'un robot cueilleur de fruit Citrus.

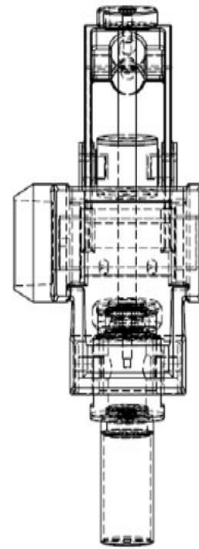
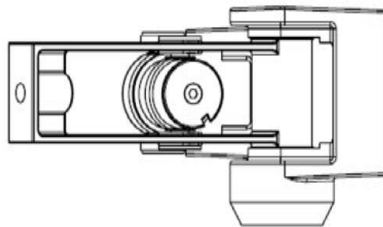
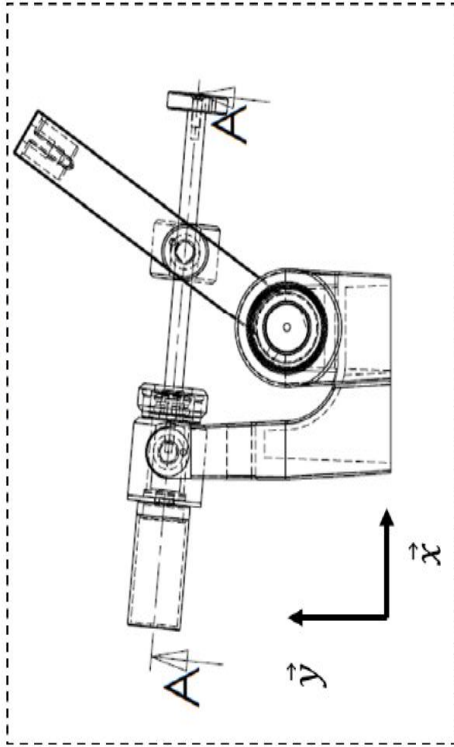


Figure 1 : Robot cueilleur de fruit, dont est extrait le bras articulé Maxpid.





COUPE A-A  
ECHELLE 1 : 4



Vue selon laquelle on  
souhaite faire le  
schéma cinématique

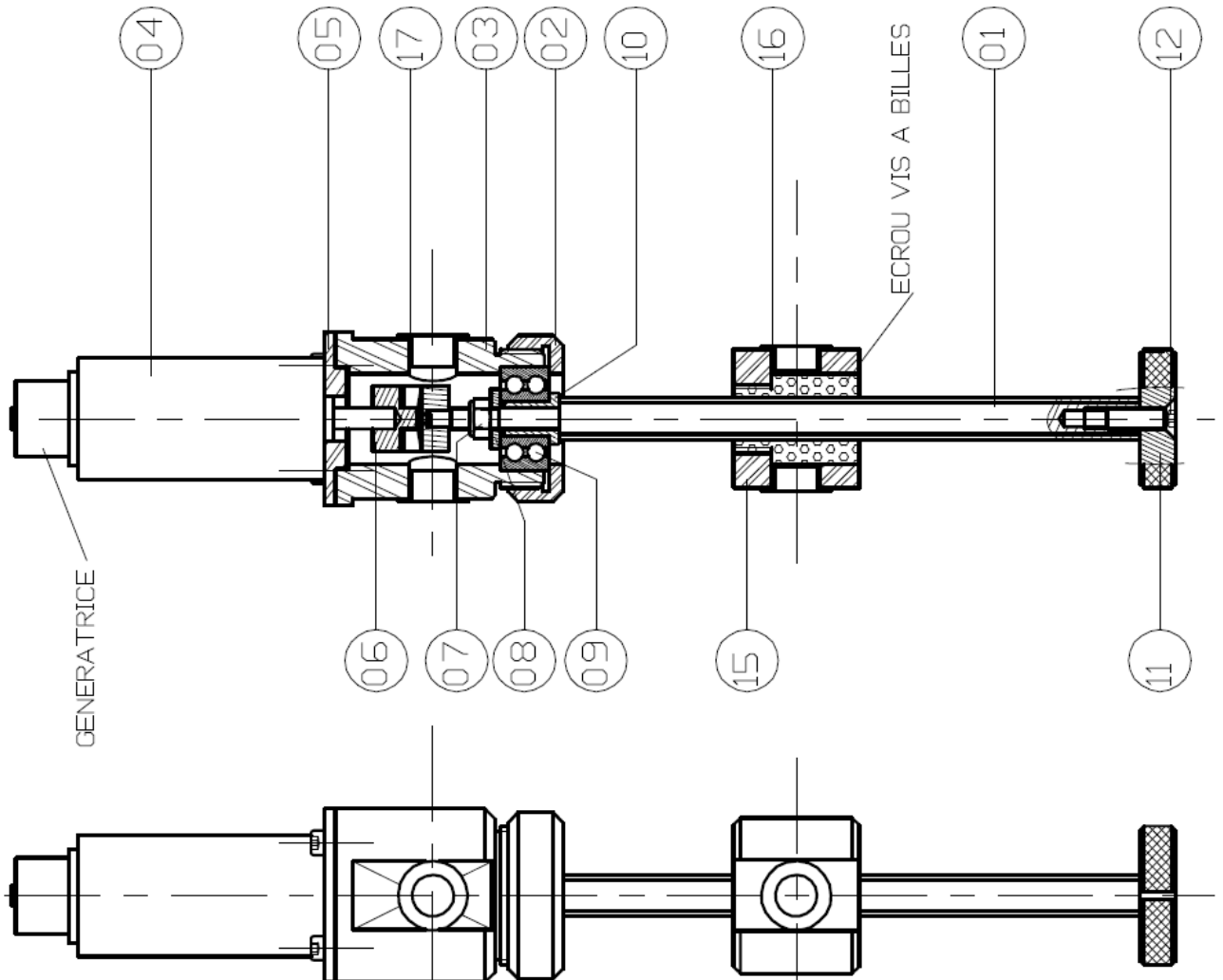
TITLE:

SIZE DWG. NO. REV

**A** Maxpid

SCALE: 1:5 WEIGHT: SHEET 1 OF 1

|    |                          |    |                            |
|----|--------------------------|----|----------------------------|
| 17 | Bague INA 120 p0 P10     | 07 | Ecrou frein H M6 Z         |
| 16 | Bague INA PAF 12 070 P10 | 06 | Accouplement HUCO          |
| 15 | Support écrou            | 05 | Bride moteur               |
| 11 | Rondelle Vis à billes    | 04 | Moteur Maxon R035 + Tachy  |
| 10 | Bague Vis à billes       | 03 | Support Vis à billes       |
| 09 | Roulement 3200 RS1       | 02 | Ecrou support vis à billes |
| 08 | Rondelle M6 17x13        | 01 | Vis à billes SHBO 12x4 R   |



Regardez bien le nom des pièces, notamment les pièces 01, 15 et 16.

- Question 7. Réaliser le graphe des liaisons du mécanisme  
 Question 8. Réaliser le schéma cinématique 2D dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ .  
 Question 9. Réaliser le schéma cinématique 3D du système.

## EXERCICE 3 : Asservissement – système EOS

Basé sur les travaux de Georges Charpak, prix Nobel de Physique 1992, EOS est un système d'imagerie révolutionnaire commercialisé par la société EOS imaging depuis 2007. Il permet l'acquisition simultanée de radiographies de face et de profil du corps entier (ou d'une zone anatomique localisée) avec une réduction de la dose de rayons X de l'ordre de 90 % par rapport à un système radiographique conventionnel ou un scanner. Une des originalités du système EOS est que le patient peut prendre place dans diverses positions correspondant aux situations de la vie courante, ce qui permet d'obtenir des images de son corps « en charge » et donc une visualisation plus précise d'éventuelles pathologies (scoliose, trouble de la statique...).



Figure 1 – Vues extérieure et intérieure du système (©EOS imaging)

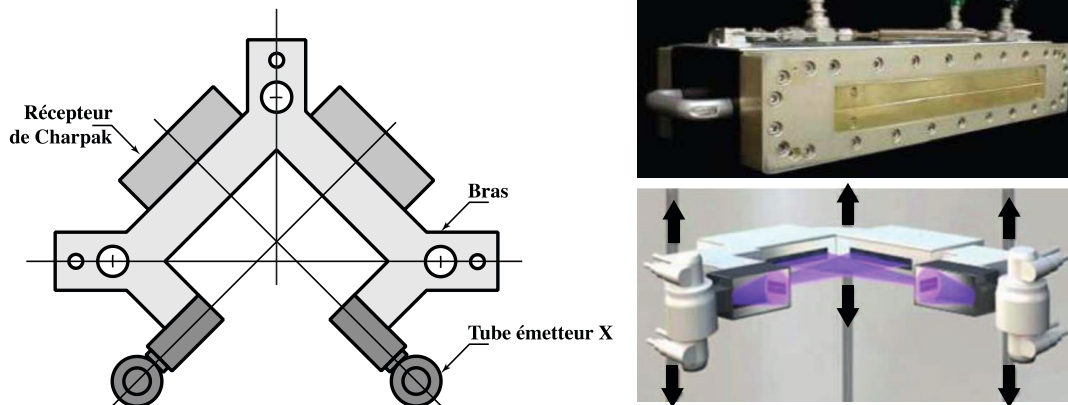


Figure 2 – À gauche : bras mobile vue de dessus. En haut à droite : un des deux détecteurs de Charpak. En bas à droite : émission et réception des rayons

La **Figure 1** présente une vue extérieure et une vue intérieure du système. On peut notamment voir une schématisation du mécanisme interne, constitué d'un bras mobile, guidé par rapport au bâti par trois colonnes verticales. Comme le montre la **Figure 2**, le bras supporte deux chaînes d'acquisition, chacune d'entre elles étant composée d'un tube à rayons X et d'un détecteur. Les tubes émettent des rayons X en pinces très fins qui sont ensuite recueillis par les deux détecteurs issus de la technologie ayant valu le prix Nobel de Physique à Georges Charpak en 1992.



## II.1 — Détermination d'un modèle dynamique de la transmission

L'objectif est de déterminer un modèle simplifié de la motorisation complète comportant les trois chaînes de transmission de puissance. Pour cela, on déterminera dans un premier temps le modèle dynamique d'une transmission ne comportant qu'un seul moteur. Puis on déterminera le modèle dynamique équivalent d'une transmission comportant 2 moteurs. Et enfin, par extension, on déterminera celui de la motorisation complète. On analysera les caractéristiques du modèle obtenu afin de déterminer si celui-ci peut être simplifié en une fonction de transfert du premier ordre (ce qui est le cas dans de nombreuses applications comportant des moteurs électriques à courant continu). **Les moteurs électriques ont été validés dans la partie précédente vis-à-vis du critère de puissance maximale à fournir. Le rendement global de la transmission étant élevé, on le prendra égal à 1 dans toute cette partie.**

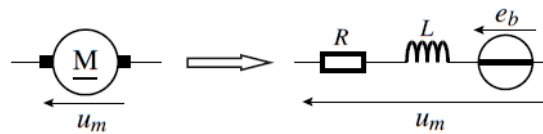
### II.1.1 — Modélisation d'une motorisation ne comportant qu'un moteur

On considère dans cette partie que le bras mobile **1** n'est entraîné en translation par rapport au bâti **0** que par une seule chaîne de transmission de puissance (**Figure 17**).



**Figure 17** – Motorisation ne comportant qu'une chaîne de transmission de puissance

Le moteur à courant continu est modélisé d'un point de vue électrique par la mise en série d'une bobine équivalente d'inductance  $L$ , d'une résistance équivalente de résistance  $R$  et d'une source de tension représentant la force contre-électromotrice  $e_b$  (**Figure 18**).



**Figure 18** – Modélisation électrique simplifiée d'un moteur à courant continu

Les équations suivantes décrivent le comportement électrique du modèle proposé pour le moteur à courant continu :

$$\begin{aligned}
 u_m(t) &= L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + e_b(t) & u_m & \text{ tension d'alimentation du moteur} \\
 C_m(t) &= K_i i(t) & i & \text{ courant d'induit} \\
 e_b(t) &= K_b \omega_m(t) & e_b & \text{ force contre-électromotrice} \\
 & & C_m & \text{ couple moteur} \\
 & & \omega_m & \text{ vitesse de rotation de l'arbre moteur}
 \end{aligned}
 \quad (II.1)$$

On souhaite déterminer l'équation différentielle représentant le comportement mécanique de la chaîne de transmission de puissance comportant le rotor du moteur, le réducteur à engrenages, la vis à billes et le bras. On suppose ici que les rendements du réducteur et de la vis à billes sont égaux à 1 et que les liaisons avec le bâti du système sont parfaites.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble  $E = \{\text{bras 1, rotor du moteur, vis 3, réducteur}\}$

donne :

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_{meq}(t) + C_{Req}(t) \quad (II.2)$$

Avec

$$\boxed{J_{eq} = J_m + J_R + \frac{J_v}{N^2} + M \left( \frac{p_v}{2\pi N} \right)^2} \quad \boxed{C_{meq} = C_m} \quad \boxed{C_{Req} = -Mg \frac{p_v}{2\pi N}}$$

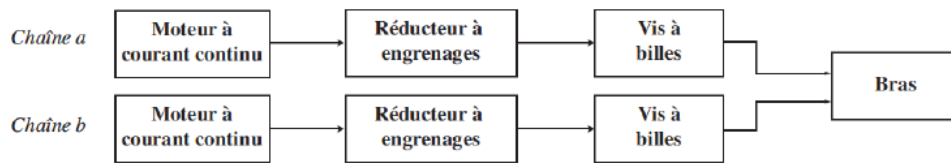
**Question 10.** Appliquer la transformée de Laplace aux équations (II.1) et (II.2) en supposant que les conditions initiales sont nulles et compléter le schéma-bloc du **Cahier Réponses**. Puis, déterminer les fonctions de transfert  $H_m$  et  $H_C$  associées aux deux entrées  $U_m$  et  $C_{Req}$  de telle sorte que :

$$\Omega_m(p) = H_m(p) U_m(p) + H_C(p) C_{Req}(p)$$

Il n'est pas utile à ce stade de l'étude de déterminer la forme canonique des fonctions de transfert, mais une écriture sous la forme  $\frac{N(p)}{D(p)}$  (où  $N(p)$  et  $D(p)$  sont deux polynômes) est attendue.

### II.1.2 — Modélisation d'une motorisation comportant deux chaînes de transmission

Nous allons dans cette partie décrire le comportement obtenu avec l'association de deux chaînes de transmission en parallèle.



**Figure 19** – Motorisation comportant deux chaînes de transmission de puissance

On considère les équations suivantes décrivant le comportement dynamique des deux chaînes. Les indices  $a$  et  $b$  évoquent respectivement les moteurs des chaînes  $a$  et  $b$ .

Les équations concernant le moteur  $a$  sont :

$$u_{ma}(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + e_{ba}(t)$$

$$C_{ma}(t) = K_{ia} i_a(t) \quad (II.3)$$

$$e_{ba}(t) = K_{ba} \omega_m(t)$$

Les équations concernant le moteur  $b$  sont :

$$u_{mb}(t) = L_b \frac{di_b(t)}{dt} + R_b i_b(t) + e_{bb}(t)$$

$$C_{mb}(t) = K_{ib} i_b(t) \quad (II.4)$$

$$e_{bb}(t) = K_{bb} \omega_m(t)$$

Les deux chaînes de transmission étant reliées au même bras mobile **1** en translation par rapport au bâti, les deux moteurs tournent à la même vitesse. L'équation traduisant le comportement mécanique est alors :

$$J_{eq2} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_{ma}(t) + C_{mb}(t) + C_{Req2}(t) \quad (II.5)$$

**Question 11.** Appliquer la transformée de Laplace aux équations (II.3), (II.4) et (II.5) en supposant que les conditions initiales sont nulles.

**Question 12.** Compléter le schéma-bloc du cahier réponses

**Question 13.** En considérant que les deux moteurs sont identiques ( $L_a = L_b$ ,  $R_a = R_b$ , ...), déterminer les fonctions de transfert  $H_{ma}$ ,  $H_{mb}$  et  $H_{C2}$  associées aux trois entrées  $U_{ma}$ ,  $U_{mb}$  et  $C_{Req2}$  de telle sorte que :

$$\Omega_m(p) = H_{ma}(p) U_{ma}(p) + H_{mb}(p) U_{mb}(p) + H_{C2}(p) C_{Req2}(p) \quad (II.6)$$

Il n'est pas utile à ce stade de l'étude de déterminer la forme canonique des fonctions de transfert, mais une écriture sous la forme  $\frac{N(p)}{D(p)}$  (où  $N(p)$  et  $D(p)$  sont deux polynômes) est attendue.

- Question 14.** En considérant que les 2 moteurs sont alimentés par la même tension  $u_m$ , montrer, dans un premier temps, que l'équation (II.6) peut se mettre sous la forme de l'équation (II.7) correspondant à une motorisation comportant un unique moteur équivalent, puis déterminer les caractéristiques équivalentes  $K_{i2}$ ,  $K_{b2}$ ,  $J_{eq2}$ ,  $R_2$ ,  $L_2$  de ce moteur équivalent.

$$\Omega_m(p) = H_{eq2m}(p) U_m(p) + H_{Ceq2m}(p) C_{Req2}(p) \quad (II.7)$$

### II.1.3 — Modélisation et analyse du comportement de la motorisation complète

On considère dans cette partie la motorisation comportant les trois chaînes de transmission de puissance (cf. Figure 20).

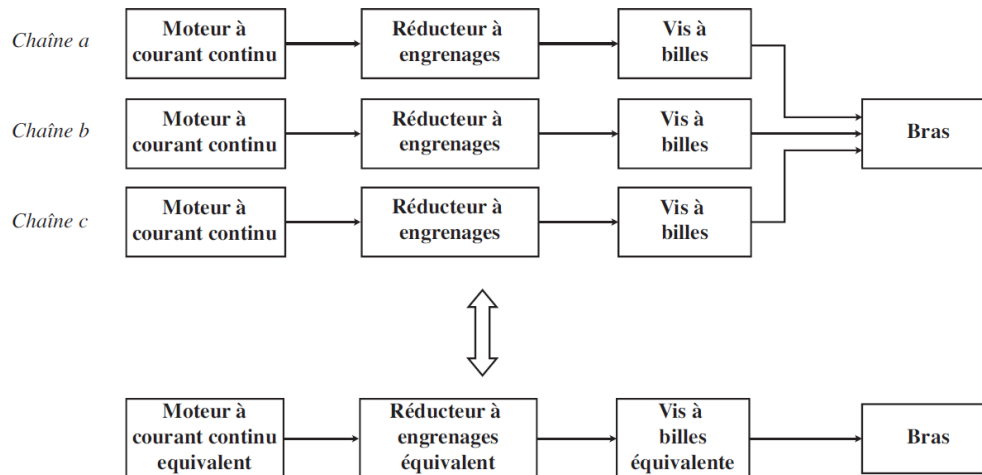


Figure 20 – Chaîne de motorisation équivalente

On donne  $J_{eq3} \approx 3,12 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  et  $K_{b3} = 0,12 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$

- Question 15.** En utilisant les résultats obtenus à la question précédente, donner par analogie les expressions des coefficients  $K_{i3}$ ,  $K_{b3}$ ,  $J_{eq3}$ ,  $R_3$ ,  $L_3$  de la motorisation équivalente ne comportant qu'une seule chaîne (moteur, réducteur, liaison hélicoïdale) correspondant à l'équation (II.8).

$$\Omega_m(p) = H_{eq3m}(p) U_m(p) + H_{Ceq3m}(p) C_{Req3}(p) \quad (II.8)$$

- Question 16.** Déterminer les formes canoniques des fonctions de transfert  $H_{eq3m}$  et  $H_{Ceq3m}$  et donner les expressions des termes  $a$ ,  $b$ ,  $K_m$ ,  $K_C$ ,  $\tau_C$  tels que :

$$H_{eq3m}(p) = K_m \frac{1}{ap^2 + bp + 1} \quad \text{et} \quad H_{Ceq3m}(p) = K_C \frac{1 + \tau_C p}{ap^2 + bp + 1}$$

- Question 17.** A partir des valeurs numériques du tableau de la Figure 13 (page suivante) et des valeurs données pour  $J_{eq3}$  et  $K_{b3}$ , montrer que l'on peut factoriser le dénominateur de  $H_{eq3m}$  ainsi :

$$ap^2 + bp + 1 = (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$$

Déterminer alors les valeurs numériques des constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

| Grandeur   | Notation       | Unités            | Valeur numérique |
|--|----------------|-------------------|------------------|
| <i>Moteur</i>                                      |                |                   |                  |
| Puissance maximale                                 | $P_M$          | W                 | 255              |
| Courant maximal                                    | $I_M$          | A                 | 20               |
| Vitesse de rotation nominale                       | $\omega_{nom}$ | tr/min            | 3400             |
| tension max  | $u_{max}$      | V                 | 48               |
| Inductance de l'induit                             | $L$            | mH                | 4,6              |
| Résistance   | $R$            | $\Omega$          | 2                |
| Constante de force contre-électromotrice           | $K_b$          | V/(1000tr/min)    | 12               |
| Constante de couple                                | $K_i$          | N·m/A             | 0,12             |
| Inertie du rotor                                   | $J_m$          | g·cm <sup>2</sup> | 800              |
| Constante de temps électrique                      | $\tau_e$       | ms                | 2,3              |
| Constante de temps mécanique                       | $\tau_m$       | ms                | 8                |
| <i>Réducteur à engrenages</i>                      |                |                   |                  |
| Rapport de réduction                               | $N (N > 1)$    |                   | 5                |
| Inertie équivalente rapportée sur l'arbre d'entrée | $J_R$          | g·cm <sup>2</sup> | 80               |
| Rendement  | $\eta_R$       |                   | 0,85             |
| <i>Vis à billes</i>                                |                |                   |                  |
| Pas de la vis                                      | $p_v$          | mm                | 10               |
| Inertie de la vis                                  | $J_v$          | g·cm <sup>2</sup> | 600              |
| Rendement  | $\eta_v$       |                   | 0,9              |
| <i>bras mobile</i>                                 |                |                   |                  |
| Masse  | $M$            | kg                | 400              |

**Figure 13** – Caractéristiques des éléments des trois chaînes de transmission de puissance